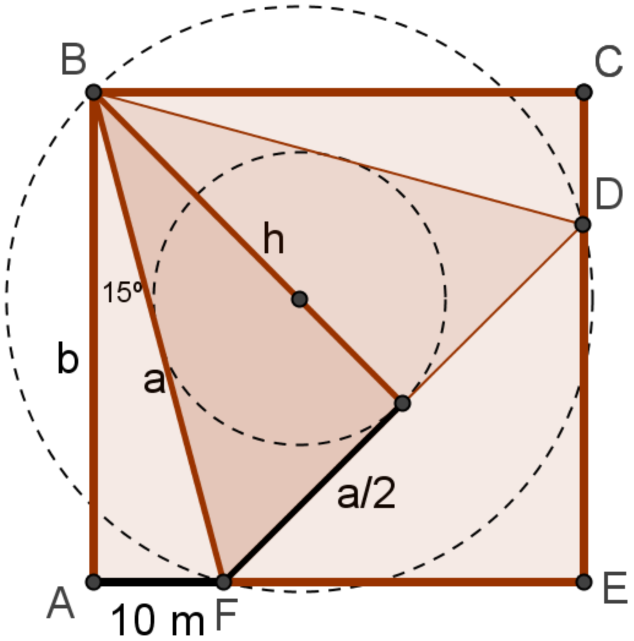
TRIÁNGULO EQUILÁTERO INSCRITO EN UN CUADRADO

El segmento AF mide 10 m. Hallar el área del cuadrado y del triángulo



Al ser el triángulo BDF equilátero sus ángulos miden 60º. Y como en el cuadrado los ángulos miden 90º. Los ángulos ABF y DBC tienen que medir 15º cada uno, así la suma de los tres ángulos ABF + FBD + DBC = 15º + 60º + 15º = 90º = ángulo ABC del cuadrado.

En el triángulo rectángulo ABF tenemos por definición de seno que $sen\, 15º = \frac{10}{a}$ →

$$a = \frac{10}{sen\, 15º}$$

Pero sabemos que el $\cos 30º = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y la fórmula de seno del ángulo mitad es

$sen\, \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, aplicándola para 15º →

$$sen\, 15º = \sqrt{\frac{1-\cos 30º}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Por tanto $a = \frac{10}{sen\, 15º} = \frac{10}{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} = \frac{20}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

En este mismo triángulo podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para hallar el cateto b.

$$b^2 = a^2 - 10^2 = \frac{400}{2-\sqrt{3}} - 100 = \frac{200+100\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$ → Racionalizando queda: →

$$b^2 = \frac{\left(200+100\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3} = 700+400\sqrt{3}$$

$$\boxed{\text{Área del cuadrado} = b^2 = 700+400\sqrt{3}\ m^2 \simeq 1392.82\ m^2}$$

Para hallar el área del triángulo tendremos que calcular previamente su altura. Para ello aplicamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por la altura, media base y un lado.

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Área del triángulo = $\frac{a.h}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ y como $a = \frac{20}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ → $a^2 = \frac{400}{2-\sqrt{3}}$

Y el Área del triángulo será

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{400}{2-\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{100\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 100\sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right) = 300+200\sqrt{3}$$

$$\boxed{\text{Área del triángulo} = 300+200\sqrt{3}\ m^2 \simeq 646.41\ m^2}$$