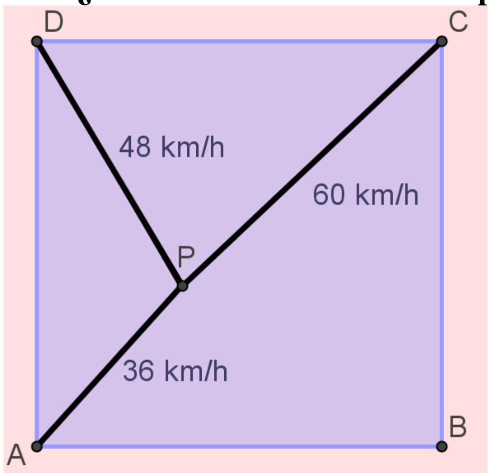
COLISIÓN TRIPLE

“Tres perros se encuentran en tres esquinas de una plaza cuadrada De pronto un cliente de uno de los restaurantes situados en la plaza, saciado ya en demasía, arroja un pedazo de chupetón que va a caer en un punto P de la plaza.

Al olor del suculento manjar, los tres canes salen al mismo tiempo corriendo en línea recta hacia él, con velocidades respectivas de 36, 48 y 60 km/h.

Tres segundos después, sus tres cabezas chocan simultáneamente en el lugar donde esperaba el pedazo de carne. ¿Cuánto mide el lado L de la plaza?



En primer lugar vamos a averiguar qué distancia ha recorrido cada perro.

Sabemos que $v = \frac{e}{t}$

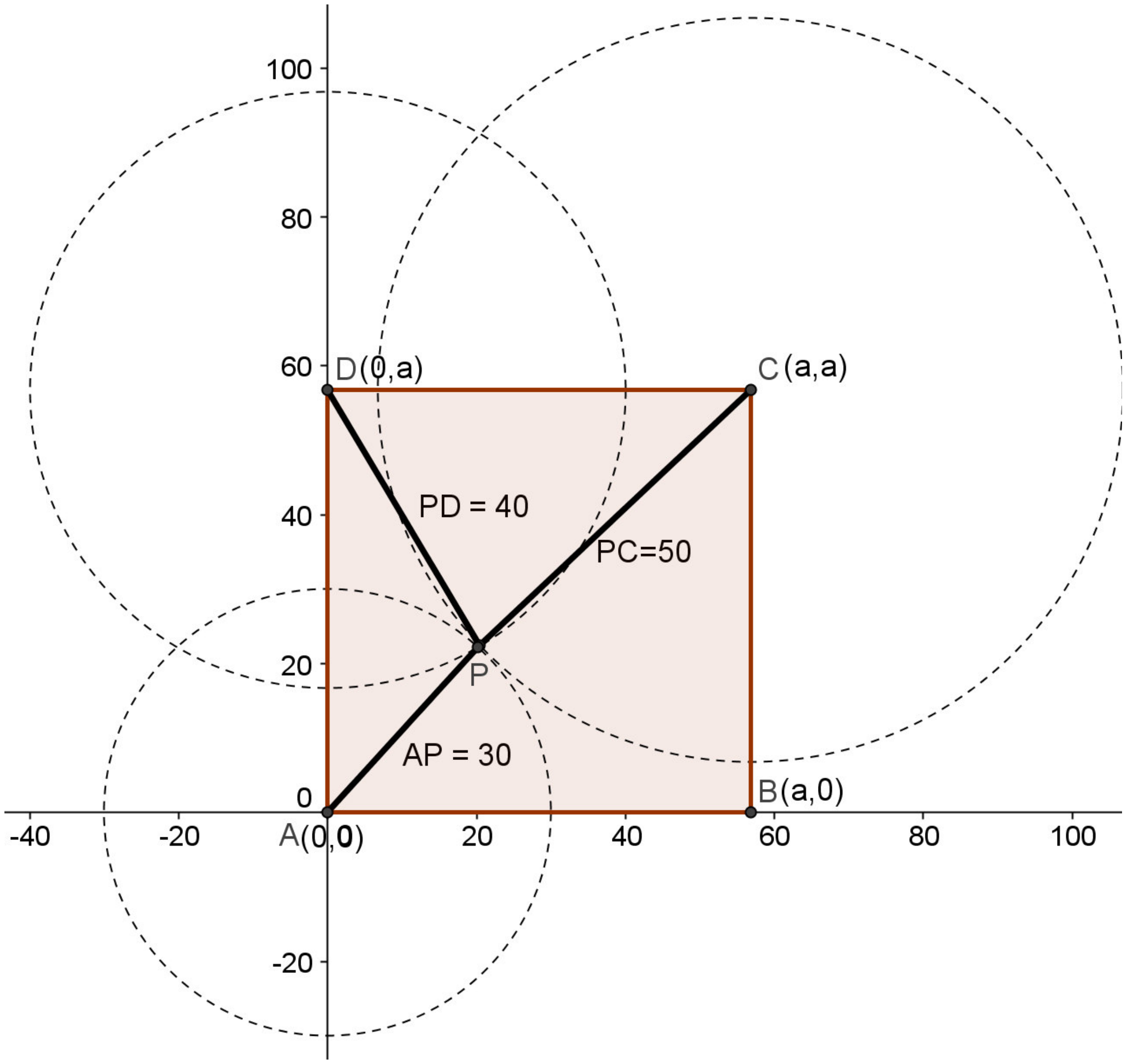
$$v_1 = 36\frac{km}{h} = \frac{e_1}{3\ seg} \rightarrow e_1 = 36\frac{km}{h}.3\ seg.\frac{1\ h}{3600\ seg}.\frac{1000\ m}{1\ km} = \frac{36x3x1000}{3600}m = 30m$$

Análogamente

$$e_2 = \frac{48x3x1000}{3600}m = 40m$$

$$e_3 = \frac{60x3x1000}{3600}m = 50m$$

Yo enfoco el problema algebraicamente. Considero el cuadrado con un vértice en el origen de coordenadas y dos de los lados coincidiendo con los ejes.



De esta manera, llamando "a" a la longitud del lado del cuadrado, las coordenadas de los vértices son A(0,0), B(a,0), C(a,a) y D(0,a).

El punto P, donde está la chuleta es el punto común a tres circunferencias, una de centro A y radio 30, otra de centro C y radio 50 y la tercera de centro D y radio 40.

Escribimos las ecuaciones de las tres circunferencias y resolvemos el sistema formado por ellas.

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2=30^2 \\ (x-a)^2+(y-a)^2=50^2 \\ x^2+(y-a)^2=40^2 \end{array}\right\}$$

Restando la 2ª ecuación menos la 3ª → $(x-a)^2-x^2=50^2-40^2$

Desarrollando el cuadrado del binomio y despejando la x nos queda: $\boxed{x=\dfrac{a^2-900}{2a}}$ (1)

Ahora restamos la 3ª ecuación menos la 1ª → $(y-a)^2-y^2=40^2-30^2$

Desarrollando el cuadrado del binomio y despejando la y nos queda: $\boxed{y = \dfrac{a^2 - 700}{2a}}$ (2)

Sustituyendo las expresiones (1) y (2) en la 1ª ecuación del sistema queda:

$$\left(\frac{a^2 - 900}{2a}\right)^2 + \left(\frac{a^2 - 700}{2a}\right)^2 = 30^2$$

Desarrollando los cuadrados y quitando denominadores nos queda la ecuación bicuadrada en "a"

$$a^4 - 3400a^2 + 650000 = 0$$

Despejando a^2 tenemos que

$$a^2 = \frac{3400 \pm \sqrt{8960000}}{2} = \frac{3400 \pm 800\sqrt{14}}{2} = 1700 \pm 400\sqrt{14} = \begin{cases} 3196.66 \\ 203.33 \end{cases}$$

Por tanto hay cuatro soluciones para el valor de a:

$$a = \pm\sqrt{3196.66} = \pm 56.54, \; a = \pm\sqrt{203.33} = \pm 14.26$$

De las cuatro la que vemos en la figura que nos interesa es $a = 56.54m$, este es el lado del cuadrado.

Por tanto el área del cuadrado será: $\boxed{Área = a^2 = 56.54^2 = 3196.66m^2}$