suma+ 57
Febrero 2008, pp.105-109

Ramanujan y el número π

"Las ideas de los matemáticos como las de los pintores o los poetas deben ser bellas. La belleza es el primer requisito: no hay lugar permanente en el mundo para unas matemáticas feas"

G.H. Hardy

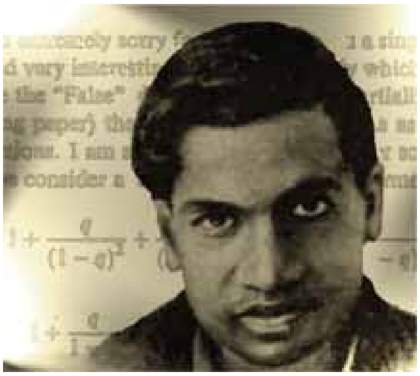
Estimado señor:

Me permito presentarme a Vd. como un contable del departamento de cuentas del Port Trust Office de Madrás, con un salario de 20 libras anuales solamente. Tengo 26 años de edad. No he recibido educación universitaria, pero he seguido los cursos de la escuela ordinaria. He hecho un estudio detallado de las series divergentes en general y los resultados a los que he llegado son calificados como sorprendentes por los matemáticos locales...

Querría pedirle el favor de que repasara los trabajos aquí incluidos. Si usted se convence de que hay alguna cosa de valor, me gustaría publicar mis teoremas, ya que soy pobre. No he presentado los cálculos reales ni las expresiones que he adoptado, pero he indicado el proceso que sigo. Debido a mi poca experiencia tendría en gran estima cualquier consejo que usted me diera. Pido que me excuse por las molestias que ocasiono.

Quedo, apreciado señor, a su entera disposición.

S. Ramanujan



Antonio Pérez Sanz
decabeza@revistasuma.es

Esta es la carta que el joven Srinivasa Ramanujan, un empleado de la aduana del puerto de Madrás en la India, había enviado a Hardy y que éste leyó con un cierto escepticismo el 16 de enero de 1913. Acompañando a la carta aparecían unas hojas de cuaderno en las que se apiñaban 120 extrañas fórmulas y la afirmación de haber descubierto una para obtener la cantidad de números primos menores que un número dado, con el sorprendente añadido de que esa fórmula funcionaba sin error al menos hasta 10.000.000. También había unas cuantas con desarrollos en serie sobre el número π. Tras una primera ojeada, Hardy piensa que todo aquello es obra de algún personaje estrafalario, de uno de tantos locos con ínfulas de genio y a punto estuvo de tirarla a la papelera.

Pero por la noche en compañía de su colega Littelwood, vuelven a revisar las extrañas fórmulas y llegan a la conclusión de que no se trata de la obra de un loco sino más bien de la de un extraño genio.

> *"Forzoso es que sean verdaderas, porque de no serlo, nadie habría tenido la imaginación necesaria para inventarlas".*

Entre las más de cien fórmulas recibidas varias están relacionadas con el número π; de todas ellas Hardy sólo es capaz de reconocer una, descubierta por Bauer, en la que aparecen los cubos de fracciones formadas con los números pares e impares, y cuyos coeficientes forman una progresión aritmética de diferencia 4:

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^3+\dots=\frac{2}{\pi}$$

El resto son completamente nuevas para él y despiertan su curiosidad y la sospecha de que Ramanujan está en posesión de teoremas más generales. Hardy se apresuró a responder a la carta de quien ya consideraba un colega indio pidiéndole las demostraciones de sus fórmulas y, sobre todo, la fórmula tan ansiada desde los tiempos de Gauss acerca de la cantidad de números primos menores que un número natural dado, no dudando en escribir:

> *"Haber demostrado lo que usted afirma habría sido la empresa matemática más extraordinaria de toda la historia de las matemáticas."*

Pero Ramanujan no envió dichas demostraciones, lo que acrecentaría aún más el interés de Hardy hacia el desconocido matemático que se consideraba a sí mismo un aficionado a las matemáticas sin una formación académica seria. De hecho, Ramanujan fue rechazado en la prueba de acceso a la Universidad.

Hardy le invitó a trasladarse a Cambridge, a lo que Ramanujan en un principio se mostró reticente. Por fin, tras la intervención de su madre y de la diosa Namagiri, de la que Ramanujan afirmaba que le dictaba sus resultados en sueños, y de una beca de 250 libras, el joven indio abandona Madrás para llegar al Trinity College en la primavera de 1913. Su estancia durante cinco años en Cambridge, hasta 1919, no fue del todo feliz. Vegetariano estricto, en un ambiente raro para él, con una comida alejada de sus gustos y costumbres, en plena guerra mundial, sin amigos salvo Hardy y Littelwood, acabó enfermando seriamente, teniendo que ser ingresado en varios sanatorios. En 1919 tras el fin de la contienda, y gravemente enfermo, decide regresar a la India. Morirá a los pocos meses. A pesar de ello, de su trabajo con Hardy nos ha dejado una increíble producción de resultados matemáticos sorprendentes en forma de "Cuadernos". Algunos de ellos todavía están siendo estudiados.

Acompañando a la carta aparecían unas hojas de cuaderno en las que se apiñaban 120 extrañas fórmulas y la afirmación de haber descubierto una para obtener la cantidad de números primos menores que un número dado, con el sorprendente añadido de que esa fórmula funcionaba sin error al menos hasta 10.000.000.

Cautivado por π

Desde muy pequeño Ramanujan estuvo cautivado por el número π. De hecho a lo largo de su corta vida descubrió numerosas fórmulas para calcular aproximaciones de π.

Para ello, como ya venían haciendo los matemáticos desde hacía más de 300 años, utilizó series formadas por infinitos términos de estructura semejante. La más simple y conocida es ésta del inglés John Wallis, publicada en 1665 en su *Arithmetica infinitorum*.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$$

La serie se acerca a π pero con una lentitud desesperante. Si hiciésemos los 100 primeros productos obtendríamos un valor de π = 3,1260789... Bastante alejado del valor verdadero.

Esta otra es de apariencia más sencilla. Son fracciones cuyos denominadores son los números impares y en las que vamos alternando sumas y restas.

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

Es la serie de Gregory-Leibniz. También nos sirve para calcular aproximaciones de π. Pero tiene el mismo inconveniente: para calcular las 100 primeras cifras de π tendríamos que desarrollar más de 10^{50} términos de la serie.

Ramanujan descubrió series que se acercaban a π con una velocidad de vértigo. Una de ellas no deja de extrañarnos:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9{,}801}\cdot\left(\frac{(4\cdot 1)!(1{,}103+26{,}390\cdot 1)}{(1!)^4\cdot 396^{4\cdot 1}}+\frac{(4\cdot 2)!(1{,}103+26{,}390\cdot 2)}{(2!)^4\cdot 396^{4\cdot 2}}+\frac{(4\cdot 3)!(1{,}103+26{,}390\cdot 3)}{(3!)^4\cdot 396^{4\cdot 3}}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{8}}{9{,}801}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1{,}103+26{,}390\cdot n)}{(n!)^4\cdot 396^{4n}}$$

La fórmula no es nada elemental. Aunque esta otra no le va a la zaga.

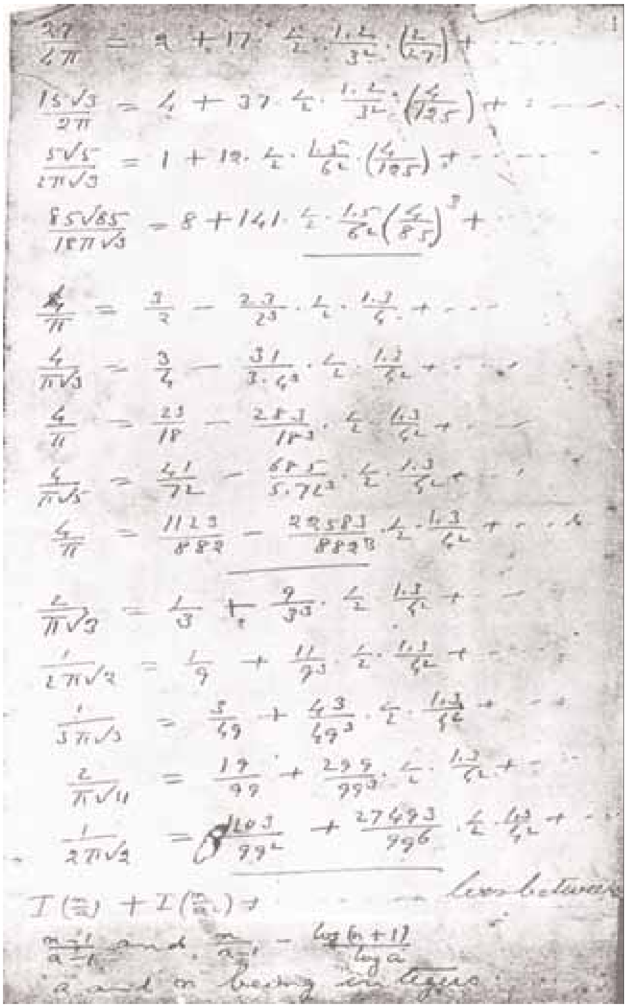
$$\frac{4}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1123+21460n)(2n-1)!!(4n-1)!!}{882^{2n+1}32^n(n!)^3}$$

Pero Ramanujan no siempre recurrió a series infinitas.

Esta simple expresión le proporcionaba 15 decimales de π:

$$\frac{355}{113}\cdot\left(1-\frac{0{,}0003}{3533}\right)=3.14159265358979\ldots$$

Algunas de sus aproximaciones a π se basan en construcciones geométricas y nos permiten obtener de forma rápida π con unos cuantos decimales.



Esta constituye por sí sola un auténtico poema geométrico-aritmético

$$\pi\approx\sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}}=\sqrt[4]{81+\frac{361}{22}}=\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}=\sqrt[4]{97{,}409090909\ldots}$$

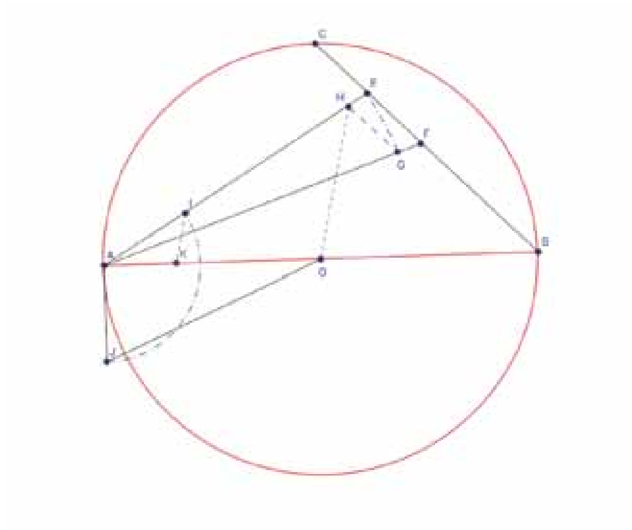
Que también se puede escribir así

$$\pi\approx\sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}}=\sqrt[4]{102-\frac{2222}{22^2}}=\sqrt[4]{97{,}409090909\ldots}$$

O en forma de fracción

$$\pi \approx \sqrt[4]{97,409090909...} = \sqrt[4]{\left(97+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}\right)} = 3,141592652...$$

Aproximación que obtuvo mediante una original y creativa construcción geométrica



• Construimos un círculo de centro O y radio la unidad. AB es su diámetro.

• C es el punto medio del arco ACB. Dividimos en tres partes iguales el radio OA para obtener el punto K, así:

$$\overline{AK} = \frac{1}{3}$$

• Trazamos el segmento CB y sobre él desde C llevamos dos veces el segmento AK para obtener los puntos E y F. Así:

$$\overline{CE} = \frac{1}{3} \quad y \quad \overline{CF} = \frac{2}{3}$$

• Trazamos los segmentos AE y AF.

• Con radio AE trazamos un arco de circunferencia hasta que corte al segmento AF. Tenemos así el punto G. Por él trazamos una paralela a BC que cortará a AE en el punto H.

• Unimos el centro O con el punto H y trazamos una paralela a OH por el punto K. Esta recta corta a AE en el punto I.

• Con radio AI trazamos un arco de circunferencia que cortará a la recta tangente a la circunferencia en el punto A en un punto J.

• Por fin trazamos el segmento OJ.

Hecha la construcción, Ramanujan afirma que la media proporcional entre OA y OJ es aproximadamente un tercio de la semicircunferencia ACB. Hagamos los cálculos:
Longitud de $ACB = \pi \cdot r = \pi$

$$\frac{\pi}{3} = \sqrt{\overline{OA}\cdot\overline{OJ}} = \sqrt{\overline{OA}\cdot\overline{OJ}} = \sqrt{\overline{OJ}} = \sqrt{\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{AJ}^2}} = \sqrt[4]{1+\overline{AJ}^2} \quad \text{(i)}$$

Calculemos el valor de AJ.

AJ = AI. Los triángulos AIK y AHO son semejantes, por tanto

$$\frac{AI}{AT} = \frac{AH}{AO} \Rightarrow \frac{AJ}{\frac{1}{3}} = \frac{AH}{1}$$

por lo cual,

$$\overline{AJ} = \frac{1}{3}\overline{AH} \qquad \text{(ii)}$$

También son semejantes los triángulos AHG y AEF. Además $AE = AG$. Por tanto

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$$

es decir,

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{AF}} \qquad \text{(iii)}$$

Calculemos AF y AE. Aplicando el teorema del coseno en el triángulo AFB tendremos:

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BF}\cdot\cos 45^{\circ}$$

Tengamos en cuenta que:

$$\overline{BC} = \sqrt{2}, \quad \overline{AB} = 2, \quad \overline{BF} = \overline{BC} - \overline{CF} = \sqrt{2} - \frac{2}{3}$$

Es decir:

$$\overline{AF}^2 = 4+\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 4+2+\frac{4}{9}-\frac{4\sqrt{2}}{9}-4+\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{22}{9}$$

A lo largo de su corta vida de su mano salieron cientos de formas distintas de calcular valores aproximados de π

Aplicamos ahora el teorema del coseno en el triángulo AEB

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BE}\cdot\cos 45^{\circ}$$

Ahora

$$\overline{BE} = \overline{BC} - \overline{CE} = \sqrt{2}-\frac{1}{3}$$

y por tanto

$$\overline{AE}^2 = 4+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 4+2+\frac{1}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{9}-4+\frac{2\sqrt{2}}{9}=\frac{19}{9}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (iii) tendremos

$$\overline{AH}^2 = \left(\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AF}}\right)^2 = \frac{\overline{AE}^4}{\overline{AF}^2} = \frac{\frac{19^2}{9^2}}{\frac{22}{9}} = \frac{19^2}{9\cdot 22}$$

y sustituyendo en (ii)

$$\overline{AJ}^2 = \left(\frac{1}{3}\overline{AH}\right)^2 = \frac{1}{9}\overline{AH}^2 = \frac{19^2}{9\cdot 9\cdot 22} = \frac{19^2}{9^2\cdot 22}$$

Sustituyendo este valor en (i) tendremos

$$\frac{\pi}{3} = \sqrt[4]{1+\overline{AJ}^2} = \sqrt[4]{1+\overline{AJ}^2} = \sqrt[4]{1+\frac{19^2}{9^2\cdot 22}} =$$
$$= \sqrt[4]{\frac{1}{9^2}\left(9^2+\frac{19^2}{22}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}}$$

Y por tanto

$$\pi \approx \sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}} = \sqrt[4]{81+\frac{361}{22}} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} =$$
$$= \sqrt[4]{97{,}409090909...} = 3{,}141592652...$$

Ramanujan no encontró un par de aproximaciones a π. A lo largo de su corta vida de su mano salieron cientos de formas distintas de calcular valores aproximados de π.

Decididamente, si alguien le puede disputar al genial Arquímedes el título de padre de π, ese sería sin duda este tímido muchacho indio: Srivinasa Ramanujan.

Y todo ello... ¿DE CABEZA?

DE CABEZA

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

BORWEIN. (1995) *Grandes Matemáticos.* Investigación y Ciencia. Temas 1. Prensa Científica. Barcelona

COLLANTES / PEREZ SANZ. (2007). *Matemáticos a contracorriente.* Ed. NIVOLA. Madrid. (En prensa)

NEWMAN. (1968) *Sigma. El Mundo de las Matemáticas*. Vol. 1. Ed Grijalbo. Barcelona.

PEREZ SANZ, A. (2000) *Documental Historias de Pi.* Serie Universo Matemático. RTVE. Madrid

POSAMENTIER / LEHMANN (2006). *La proporción trascendental.* Ed Ariel Barcelona