SUMA+ 58
Junio 2008, pp.101-105

Gauss y el polígono regular de 17 lados

Cuando se finaliza un noble edificio no deben quedar visibles los andamios

C.F. Gauss

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí (Madrid)
decabeza@revistasuma.es

El sorprendente encuentro entre la Aritmética, el Álgebra y la Geometría.

El 18 de febrero de 1792, antes de cumplir los 15 años el joven Carl Friedrich Gauss hace su inscripción en el Collegium Carolinum de Brunswick. En este colegio da clases de matemáticas y ciencias naturales E. A. W. Von Zimmermann (1743-1815) su valedor ante el duque de Brunswick.

Gauss permanecerá en él hasta 1795, estudiando lenguas clásicas, literatura, filosofía y, por supuesto, matemáticas superiores, siendo un alumno brillante en todas ellas. Entre sus lecturas de matemáticas de esta época están los *Principia Mathematica* de Newton, el *Ars Conjectandi* de Jackob Bernoulli y algunas de las memorias de Euler. En el Collegium Carolinum Gauss iniciará alguna de sus futuras investigaciones matemáticas, según sus propias confesiones posteriores, como la distribución de los números primos o los fundamentos de la geometría.

Cuando en el otoño de 1795 se traslada a la Universidad Georgia Augusta de Göttingen, con una beca del Duque, Gauss aún no ha decidido su futuro académico dudando entre los estudios de Filología clásica y las Matemáticas. Las lecciones de matemáticas, no muy buenas según la opinión de Gauss, las impartía el anciano profesor Gotthelf Abraham Kästner que tenía entonces 76 años. En esta época conoce a Wolfgang (Farkas) Bolyai, que se incorporó a la universidad un año después que él. Gauss, unos años más tarde llegó a afirmar: *Bolyai fue el único que supo interpretar mis criterios metafísicos sobre las Matemáticas.* Y también que Bolyai fue el *espíritu más complicado que jamás conocí*.

Bolyai es más explícito al hablar de su amistad:

> Nos unía la pasión por las Matemáticas y nuestra conciencia moral, y así paseábamos durante largas horas en silencio, cada uno ocupado en sus propios pensamientos.

Justo un mes antes de cumplir los 19 años, Gauss se decantará definitivamente por las matemáticas y hará su primera anotación en su diario de notas, un pequeño cuaderno de 19 páginas, que acompañará a Gauss hasta 1814, el diario científico más importante de la historia de las matemáticas

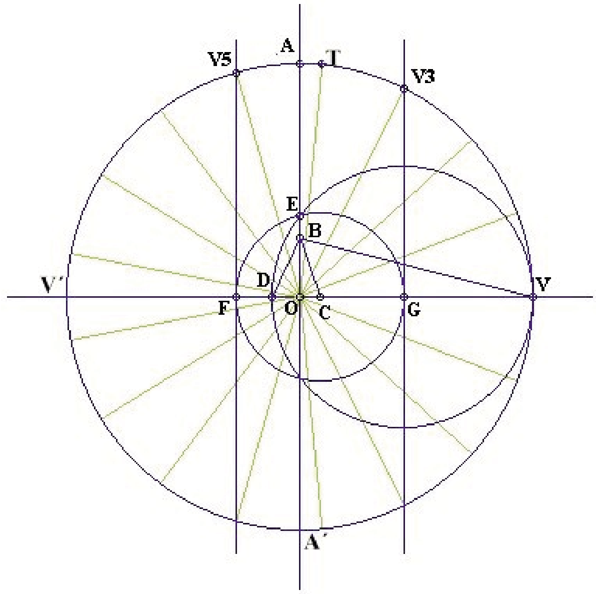
Construcción con regla y compás del polígono regular de 17 lados

Desde su llegada a Göttingen el joven Gauss siguió desarrollando de forma autónoma sus investigaciones sobre números que había iniciado en el Collegium. Sin duda, más fruto de estas investigaciones que de las enseñanzas de Kästner, cuando Gauss estaba en su casa de Brunswick, se va a producir un descubrimiento que será clave, no sólo en la carrera de Gauss, sino en el futuro de las matemáticas: **el heptadecágono, el polígono regular de 17 lados se puede construir con regla y compás.**

Él mismo, muchos años más tarde, recordará el momento en una carta que dirige a Gerling fechada el 6 de enero de 1819:

> Fue el día 29 de marzo de 1796, durante unas vacaciones en Brunswick, y la casualidad no tuvo la menor participación en ello ya que fue fruto de esforzadas meditaciones; en la mañana del citado día, antes de levantarme de la cama, tuve la suerte de ver con la mayor claridad toda esta correlación, de forma que en el mismo sitio e inmediatamente apliqué al heptadecágono la correspondiente confirmación numérica.

El día siguiente, el 30 de marzo, justo un mes antes de cumplir los 19 años, Gauss se decantará definitivamente por las matemáticas y hará su primera anotación en su diario de notas, un



Construcción del polígono regular de 17 lados

Método de Gauss(1796), simplificada por H.W. Richmond (1893)

1. Se construye la circunferencia con centro en O. Se dibujan los diámetros perpendiculares AA´ y VV´
2. Se obtiene un punto B, sobre el radio OA, tal que el segmento OB es la cuarta parte de OA
3. Se obtiene el punto C, sobre OV, tal que el ángulo OBC es la cuarta parte del ángulo OBV (hay que bisectar dos veces un ángulo)
4. Se obtiene un punto D, sobre el diámetro VV´, tal que el ángulo DBV sea de 45º (se puede hacer bisectando un ángulo recto)
5. Se obtiene G, mitad del segmento DV, se dibuja la circunferencia con centro G y radio GV. Esta circunferencia corta al radio OA en el punto E.
6. Se dibuja la circunferencia con centro C y radio CE, dicha circunferencia corta a VV´ en dos puntos: F y G
7. Se levantan perpendiculares a VV´, pasando por F y G , que cortan a la circunferencia en V3 y V5.
8. La mitad del arco V3V5, nos da un punto T. El segmento V 3T es el lado del polígono regular de 17 lados.

pequeño cuaderno de 19 páginas, que acompañará a Gauss hasta 1814, el diario científico más importante de la historia de las matemáticas, en el que irá anotando, a veces de forma críptica, los resultados matemáticos que le vienen a la cabeza, en total 144 anotaciones. Por este diario desfilará un alto porcentaje de los descubrimientos matemáticos del siglo XIX. En este libro no fueron recogidos todos los descubrimientos de Gauss en el período prolífico de 1796 a 1814. Pero muchos de los anotados bastarían para establecer la prioridad de Gauss en campos, donde algunos de sus contemporáneos se niegan a creer que Gauss les precediera.

Muchos hallazgos que quedaron enterrados durante décadas en este diario habrían encumbrado a media docena de grandes matemáticos de haber sido publicados. Algunos jamás se hicieron públicos durante la vida de Gauss, y nunca pretendió la prioridad cuando otros autores se le anticiparon. Sus anotaciones constituían descubrimientos esenciales de la Matemática del siglo XIX. Un documento que por desgracia para la ciencia no verá la luz hasta casi 50 años después de la muerte de Gauss.

> Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes, etc. Mart. 30 Brunsv.

Con tan sólo 18 años, el joven Gauss había hecho un descubrimiento que por sí solo le habría hecho pasar a la historia de las matemáticas. Un descubrimiento que constituía sólo la punta del iceberg de una teoría mucho más amplia que dará origen tres años más tarde a las *Disquisitiones Arithmeticae,* obra que Gauss va madurando durante su estancia en la universidad de Gottingën.

En esa misma carta a Gerling, Gauss relata en primera persona cómo llegó a este descubrimiento:

> Por una reflexión muy profunda sobre la relación existente entre el conjunto de raíces de la ecuación
>
> $$\frac{x^p-1}{x-1}=0$$
>
> por razones aritméticas, he llegado a vislumbrar muy claramente la naturaleza de esta relación, tras unos días de vacaciones en Brunswick, la mañana de este día, justo antes de levantarme, de manera que he podido hacer sobre el terreno la aplicación particular al polígono regular de 17 lados y ejecutar los cálculos numéricos correspondientes.

Gauss tiene ya en su cabeza una visión clara del modelo geométrico de representación de los números complejos y de su potencial revolucionario para atacar ecuaciones ciclotómicas. Y justo en un momento de la historia en que la colectividad matemática tiene serios reparos a la utilización alegre de los números imaginarios que Euler ha realizado cincuenta años antes al proponer su revolucionaria fórmula (Prop. 138), que relaciona las cantidades imaginarias con la cantidades trascendentes nacidas del círculo, que así se llama el capítulo correspondiente de la *Introductio in Analisin infinitorum* (1748)

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\, sen\, v$$

Que tras la introducción de la letra i como notación de la unidad imaginaria, será una de las fórmulas más populares de las matemáticas: $e^{iv} = \cos v + i\, sen\, v$, sobre todo para el valor particular de $v=\pi$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\, sen\,\pi = -1$$

Porque en la cabeza del joven Gauss las raíces de la ecuación, de la forma

$$e^{i\frac{2k\pi}{p}}$$

se perfilan claramente como los vértices de un polígono regular de p lados.

La Aritmética modular viene en ayuda del Álgebra

Gauss se ocupa del caso especial p = 17.

Si una de las raíces es $r = e^{i\frac{2\pi}{17}}$, las otras raíces son las potencias sucesivas de r, es decir r^m.

Gauss crea una tabla con las 17 raíces ordenadas según las potencias de 3 expresadas en módulo 17.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
m=3k(mod 17)	1	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

Los valores de m forman una permutación de los números enteros del 1 al 16.

¿Por qué ordena Gauss las raíces de esta forma un tanto arbitraria? Sencillamente, esto le permite comprobar las funciones de las raíces que permanecen invariantes para un cierto número de permutaciones.

Los antecedentes algebraicos

La idea de relacionar las funciones de las raíces que permanecen invariantes o que toman un número pequeño de valores al permutar las raíces, con las soluciones de la ecuación, la desarrolla ampliamente Lagrange en una memoria de 1771.

La idea parte del hecho de un resultado explicitado por Vandermonde: todos los radicales que intervienen en las fórmulas de resolución de las ecuaciones de grado menor que 4 se pueden expresar como función de las raíces.

En la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, el discriminante

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac} = a\sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

Es una función simétrica de las raíces.

En la ecuación de tercer grado $ax^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$, la función $T = (x_1 + jx_2 + j^2x_3)^3$ sólo toma dos valores distintos al hacer:

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$T_1 = (x_1 + jx_2 + j^2x_3)^3 \text{ y } T_2 = (x_1 + j^2x_2 + jx_3)^3$$

Por lo tanto, las funciones $T_1 + T_2$, y $T_1 \bullet T_2$ son simétricas respecto de las raíces de la ecuación y por ello calculables utilizando sólo los coeficientes de la ecuación.

Las tres raíces se pueden calcular resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -b \\ x_1 + jx_2 + j^2x_3 = \sqrt[3]{T_1} \\ x_1 + j^2x_2 + jx_3 = \sqrt[3]{T_2} \end{cases}$$

La existencia de funciones T_i de las raíces, que toman menos valores distintos que el grado de la ecuación, permiten encontrar las soluciones mediante ecuaciones auxiliares construidas a partir de funciones simétricas de las T_i . A estas ecuaciones se las conoce como *ecuaciones resolventes*.

La genialidad de Gauss

La tabla de Gauss le permite construir ecuaciones resolventes agrupando las raíces de 8 en 8, de 4 en 4 o de 2 en 2.

Gauss comienza con dos periodos de 8 raíces

$$p_1 = \omega_1 + \omega_9 + \omega_{13} + \omega_{15} + \omega_{16} + \omega_8 + \omega_4 + \omega_2$$

$$p_2 = \omega_3 + \omega_{10} + \omega_5 + \omega_{11} + \omega_{14} + \omega_7 + \omega_{12} + \omega_6$$

Tanto p_1 como p_2 contienen al mismo tiempo a ω_n y a su inversa ω_{17-n} .

La suma de $p_1 + p_2 = -1$, ya que la suma de las 17 raíces de $x^{17} - 1 = 0$, las 16 de p_1 y p_2 más la raíz 1, ha de ser 0

Y como $\omega_a \cdot \omega_b = \omega_c \quad donde \quad c \equiv a + b \pmod{17}$

El producto de $p_1 \bullet p_2 = -4$

De modo que p_1 y p_2 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 + x - 4 = 0$$

A continuación Gauss agrupa las raíces de p_1 y p_2 en cuatro periodos de 4 raíces

$$\begin{cases} q_1 = \omega_1 + \omega_{13} + \omega_{16} + \omega_4 \\ q_2 = \omega_9 + \omega_{15} + \omega_8 + \omega_2 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} q_3 = \omega_3 + \omega_5 + \omega_{14} + \omega_{12} \\ q_4 = \omega_{10} + \omega_{11} + \omega_7 + \omega_6 \end{cases}$$

Podemos comprobar que

$$q_1 + q_2 = p_1 \ ; \qquad q_1 \bullet q_2 = p_1 + p_2 = -1$$

Y por tanto q_1 y q_2 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - p_1\,x - 1 = 0$$

Análogamente

$q_3 + q_4 = p_2$; $\qquad q_3 \bullet q_4 = p_1 + p_2 = -1$

Y por tanto q_3 y q_4 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - p_2\,x - 1 = 0$$

Es fácil comprobar que $\omega_a + \omega_{17-a} = 2\cos\frac{2a\pi}{17}$

Así que $q_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17} + 2\cos\frac{8\pi}{17}$ y $q_2 = 2\cos\frac{4\pi}{17} + 2\cos\frac{16\pi}{17}$

Con la ecuación $x^2 - p_2\,x - 1 = 0$

Obtenemos que:

$$q_3 = 2\cos\frac{6\pi}{17} + 2\cos\frac{10\pi}{17} \text{ y } q_4 = 2\cos\frac{12\pi}{17} + 2\cos\frac{14\pi}{17}$$

Por fin, formando periodos de 2 en 2 tendremos

$$r_1 = \omega_1 + \omega_{16} \quad ; \quad r_2 = \omega_{13} + \omega_4$$

Y por tanto:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = q_1 \\ r_1 \cdot r_2 = q_3 \end{cases}$$

Así: $\quad r_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17} \quad$ y $\quad r_2 = 2\cos\frac{8\pi}{17}$

Y reemplazando en los valores de p_i tendremos... es sólo un problema de paciencia...

$$p_1 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \quad ; \quad p_2 = -\frac{\sqrt{17} + 1}{2}$$

Y q_i:

$$q_1 = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \quad ;$$

$$q_2 = \frac{p_1 - \sqrt{p_1^2 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$

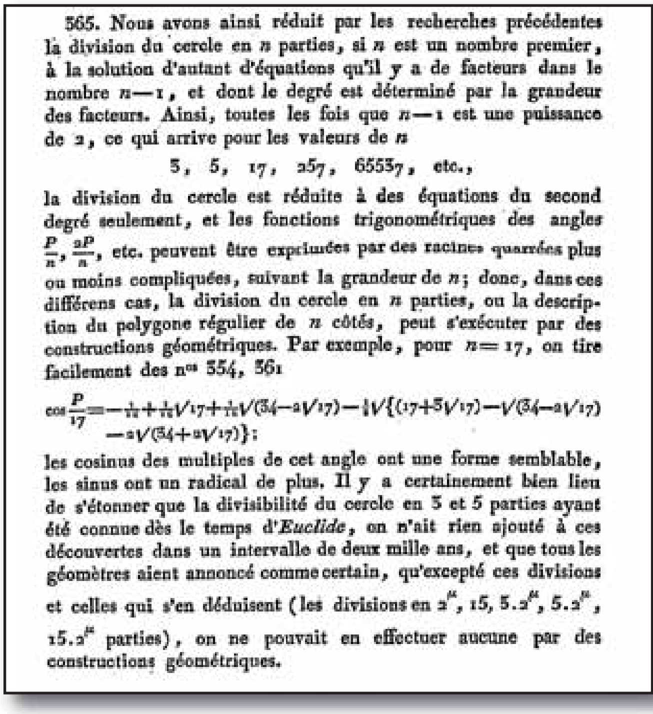
$$q_3 = \frac{p_2 + \sqrt{p_2^2 + 4}}{2} = \frac{-\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \quad ;$$

$$q_4 = \frac{p_2 - \sqrt{p_2^2 + 4}}{2} = \frac{-\sqrt{17} - 1 - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}$$

y por fin r_i:

$$\frac{r_1}{2} = \cos\frac{2À}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\ + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$$

Sustituyendo en las sucesivas ecuaciones podemos calcular las 16 raíces de la ecuación.


565. Nous avons ainsi réduit par les recherches précédentes la division du cercle en n parties, si n est un nombre premier, à la solution d'autant d'équations qu'il y a de facteurs dans le nombre $n-1$, et dont le degré est déterminé par la grandeur des facteurs. Ainsi, toutes les fois que $n-1$ est une puissance de 2, ce qui arrive pour les valeurs de n

3, 5, 17, 257, 65537, etc.,

la division du cercle est réduite à des équations du second degré seulement, et les fonctions trigonométriques des angles $\frac{P}{n}$, $\frac{2P}{n}$, etc. peuvent être exprimées par des racines quarrées plus ou moins compliquées, suivant la grandeur de n; donc, dans ces différens cas, la division du cercle en n parties, ou la description du polygone régulier de n côtés, peut s'exécuter par des constructions géométriques. Par exemple, pour $n = 17$, on tire facilement des nos 354, 361

$$\cos\frac{P}{17} = -\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}\sqrt{17} + \tfrac{1}{16}\sqrt{(34-2\sqrt{17})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\{(17+3\sqrt{17}) - \sqrt{(34-2\sqrt{17})} - 2\sqrt{(34+2\sqrt{17})}\}};$$

les cosinus des multiples de cet angle ont une forme semblable, les sinus ont un radical de plus. Il y a certainement bien lieu de s'étonner que la divisibilité du cercle en 3 et 5 parties ayant été connue dès le temps d'*Euclide*, on n'ait rien ajouté à ces découvertes dans un intervalle de deux mille ans, et que tous les géomètres aient annoncé comme certain, qu'excepté ces divisions et celles qui s'en déduisent (les divisions en 2^μ, 15, 5.2^μ, 5.2^μ, 15.2^μ parties), on ne pouvait en effectuer aucune par des constructions géométriques.

Disquisitiones Arithmeticae. Ed. Francesa de 1809

Del Álgebra a la Geometría

Al final sólo hemos tenido que resolver de forma sucesiva ecuaciones de 2º grado, es decir todo el proceso se puede realizar geométricamente con regla y compás. Esto ha sido así ya que para n = 17 tenemos n – 1 = 16 = 2 • 2 • 2 • 2

La alegría del joven Gauss, ese 30 de marzo de 1796 aún tiene 18 años, está más que justificada. Acaba de resolver un problema de más 2 milenios de antigüedad.

Este hecho, por sí sólo, le haría pasar a la Historia de las Matemáticas. Definitivamente las lenguas clásicas habían perdido un genio para siempre. Las matemáticas y todas las ciencias habían ganado la batalla en la cabeza de Gauss.

Gauss terminará sus *Disquisitiones Arithmeticae*, con las proposiciones 365 y 366, tantas como los días del año, rebosante de alegría, facilitando la lista de los polígonos de menos de 300 lados que se pueden construir con regla y compás. El joven genio ha tocado la gloria y lo sabe.

> Para que la división geométrica del círculo en N partes sea posible, N debe ser 2, o una potencia de 2, o bien un número primo de la forma 2m +1 o bien le producto de una potencia de 2 por uno o varios números primos diferentes de esta forma

Y todo ello antes de cumplir los 19 años... Cuesta creer que todo lo hiciera DE CABEZA...

DE CABEZA ■

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

BÜHLER, W. K. (1981): *Gauss A biographical Study,* Springer-Verlag, New York.

DUNNINGTON, G. W., GAUSS, C. F. (1955): *Titan of Science,* New York.

FRIEDELMEYER, J-P. (1994): “Recherche inconnue désespérément”, en *Histoires de problèmes. Histoire des mathématiques*, Ellipses, I.R.E.M. París.

GAUSS, C. F., (1973): *Werke*. Georg Olms, Hildesheim.

GAUSS, C. F., (1996): *Disquisicions aritmètiques*. Traducción de la profesora Pascual Xufrí G., Sociedad Catalana de Matemáticas. Barcelona.

PARDO REGO, V. (2003): *Lagrange. La elegancia matemática,* Nivola, Madrid.

RASSIAS G. M., (1991): *The mathematical heritage of C F Gauss,* Singapore.

REICH, K. (1977): *Gauss. 1777/1977*. Inter-Nationes. Bonn-Bad Gedessberg.

Vídeos

PÉREZ SANZ, A. (2000): *Gauss. De lo real a lo imaginario*. Serie Universo Matemático. RTVE.

Internet

http://www.geocities.com/RainForest/Vines/2977/gauss/formulae/heptadecagon.html

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Gauss.asp