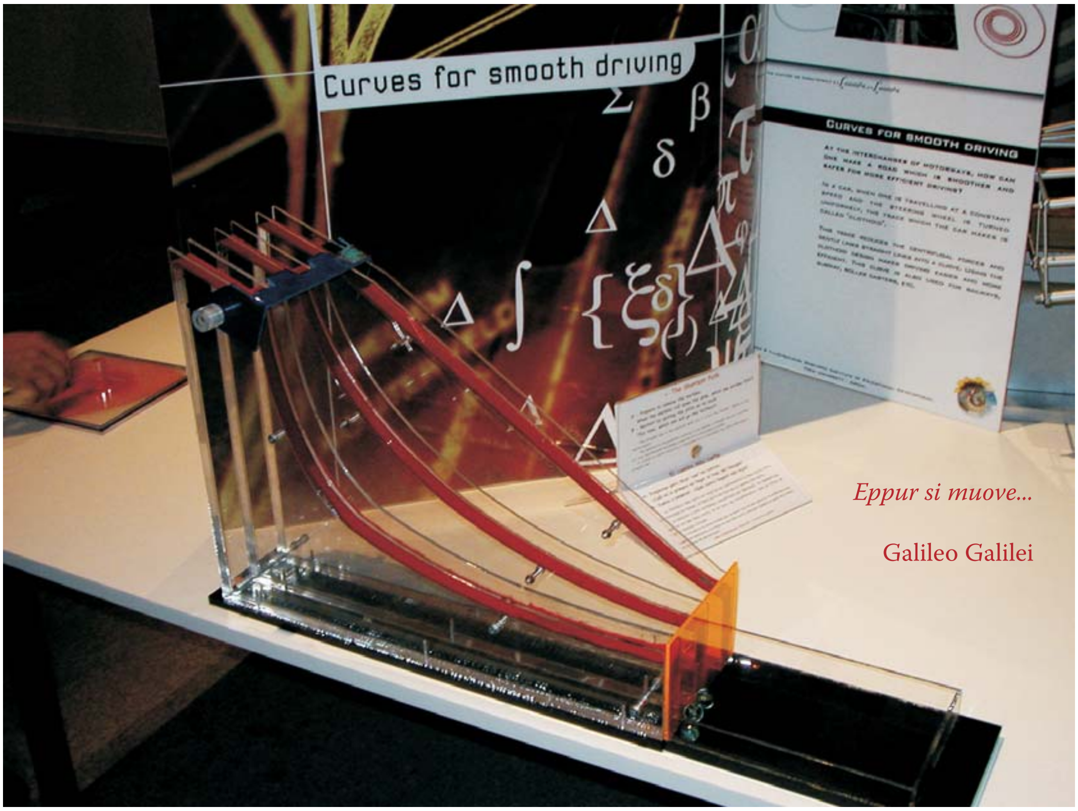
SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 101-105

De cabeza

El mejor tobogán...
... o, Galileo no llevaba razón



Eppur si muove...

Galileo Galilei

En la exposición *¿Por qué las Matemáticas?* que se ha celebrado con motivo del ICM 2006 en el centro cultural Conde Duque de Madrid, entre los días 17 de agosto al 29 de octubre, una actividad llamó inmediatamente mi atención desde que la vi, nada más desembalar la caja en la que venía. Se trataba de un artilugio hecho en metacrilato, con tres rampas de descenso como las de los toboganes de los saltos de esquí. Las tres rampas eran una recta y dos curvas muy diferentes entre sí, colocadas en paralelo, que empezaban a la misma altura y descendían también hasta una altura común. Desde la parte superior y a la misma altura un tope liberaba simultáneamente tres canicas de vidrio y si uno estaba ojo avizor podía comprobar cual de las tres bolas llegaba antes.

Era una visualización y una puesta en escena preciosa y contundente del problema de la braquistocrona.

Antonio Pérez Sanz,
decabezaz@fespm.org

Era una visualización y una puesta en escena preciosa y contundente, en forma de carrera de canicas, de uno de los problemas más sugerentes de la historia de las matemáticas: el problema de la *braquistocrona*.

En la exposición había voluntarios, que eran estudiantes de matemáticas de distintos cursos, para atender y facilitar informaciones y las explicaciones pertinentes sobre las distintas actividades y problemas de la exposición. Antes de la inauguración recibieron unas charlas explicativas de los contenidos matemáticos de la exposición y de las actividades a realizar por el público. Cuando llegamos al experimento de las tres rampas les pregunté si conocían la historia del problema de la braquistocrona y a sus protagonistas, pensando que todos ellos me mirarían con una mirada de suficiencia como si les hubiese preguntado por Pitágoras o Newton. Sin embargo, todos me miraron con cara de sorpresa, y había estudiantes de 2º curso hasta 4º de la facultad de matemáticas. Ante mi expresión de asombro, comenzaron a disculparse por algo de lo que son completamente inocentes, aunque no deja de ser chocante: un estudiante de matemáticas puede terminar sus estudios universitarios desconociendo los momentos y personajes estelares de esta ciencia. ¡Y ya sabemos lo que les ocurre a los que ignoran su propia historia!

A estos estudiantes y sobre todo a sus profesores, a los actuales y a los de las etapas anteriores, va dedicado este artículo, con el deseo de que entre todos pongamos en valor ante los ojos de los jóvenes la historia de las matemáticas.

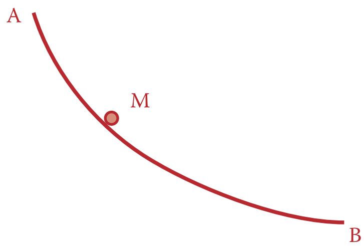
El reto de Johann Bernoulli

En el número de junio de 1696 de la revista *Acta Eruditorum*, publicada en Leipzig bajo los auspicios de Leibniz, aparece el enunciado de uno de los retos más populares de la historia lanzado de forma pública por un matemático a todos sus contemporáneos, dándoles de plazo hasta fin de año:

> Datis in plano verticali duobus punctis *A* & *B*, assignare Mobili *M* viam *AMB* per quam gravitate sua descenden, & moveri incipiens a puncto *A*, *brevissimo tempore* perveniat ad alterem punctum *B*.

La expresión latina *brevissimo tempore* equivale en griego al término **braquistocrona** (*braquisto*= más breve, *chronos*= tiempo). Traducido libremente al castellano:

> Dados dos puntos *A* y *B* en un plano vertical, ¿cuál es la curva que debe describir un móvil *M*, sometido exclusivamente a la acción de la gravedad, para que partiendo en reposo del punto *A* llegue al punto *B* en el tiempo más breve posible?



Pasados los seis meses, sólo Leibniz, que por algo era el editor de las *Acta Eruditorum*, le había enviado una carta con la solución, en la que además le solicita que amplíe el plazo para que otros matemáticos pudiesen conocer y resolver el problema. Estaba pensando en Newton y además en aquella época no había Internet y las comunicaciones y los libros y revistas podían tardar meses y años en llegar a su destino.

El pequeño de los Bernoulli plantea la ampliación del plazo para resolver el reto con unas ampulosas palabras que serán una premonición a lo largo de la historia: ningún matemático se hará rico resolviendo complicados problemas.

> Ya se sabe con certeza que raramente hay algo que de forma más grata excite a los espíritus nobles e ingeniosos a esfuerzos que conducen al aumento del conocimiento que proponer problemas difíciles y al mismo tiempo útiles, ya que con sus soluciones – como por ningún otro medio – podrán alcanzar la fama y construir para ellos mismos monumentos eternos para la posteridad...
>
> ... Indudablemente este premio no es de oro ni de plata, porque éstos solo atraen a almas ruines y venales de las que no podemos esperar nada laudable para la ciencia. De esta forma coronaremos con honra y excelencia, pública y privadamente, oralmente y por escrito, la perspicacia de nuestro gran Apolo.

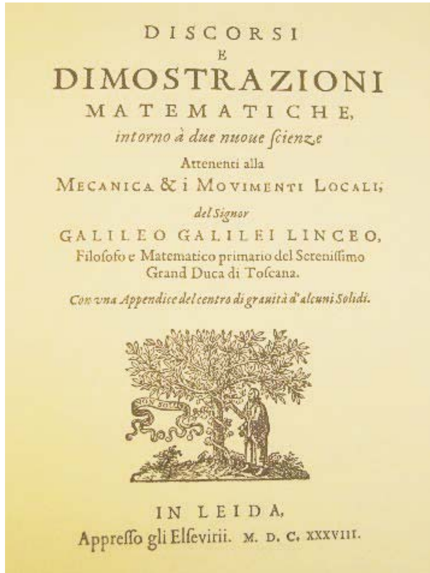
Dados dos puntos A y B en un plano vertical, ¿cuál es la curva que debe describir un móvil M, sometido exclusivamente a la acción de la gravedad, para que partiendo en reposo del punto A llegue al punto B en el tiempo más breve posible?

Al año siguiente, además de las soluciones de Leibniz y del propio Johann, aparecieron otras tres soluciones, la de Jacob Bernoulli, el hermano mayor de Johann, la de L´Hôpital y una anónima llegada directamente de Inglaterra... ¡Por sus garras se conoce al león! ...por supuesto era de Newton.

Los intentos de Galileo

Pero, 60 años antes de estas disputas fraternales, Galileo Galilei ya se había enfrentado al mismo problema... sin sospechar que no se trataba de un simple juego de caída de canicas.

En 1638, en la tercera jornada de la lectura de su obra *Discursos y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias*, Galileo, estudiando el movimiento uniformemente acelerado cree dar con la respuesta correcta al problema de la curva de *brevissimo tempore*.


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

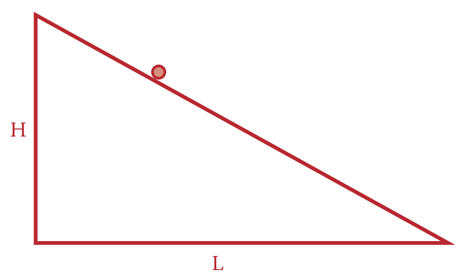
Hablando de móviles que caen en un plano inclinado, enuncia este resultado

> *Teorema V*: Los tiempos de descenso sobre dos planos inclinados de longitudes y alturas diferentes, están entre sí en una razón que es igual al producto de la razón de las longitudes por la raíz cuadrada de la razón inversa de las alturas.

Traducido a un lenguaje más próximo:

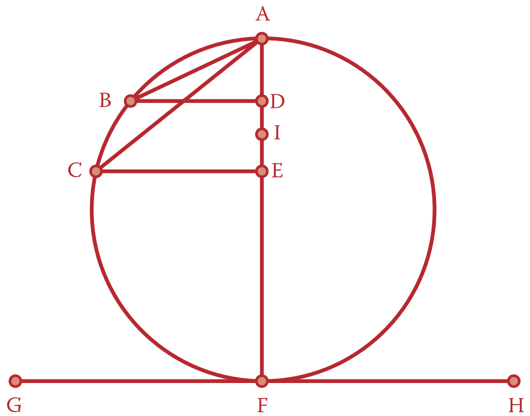
Si un móvil recorre una longitud *L*, descendiendo una altura *H*, el tiempo que tarda en descender viene dado por:

$$t = \frac{k \cdot L}{\sqrt{H}}$$



A continuación Galileo prueba el siguiente resultado, cuando menos sorprendente.

> *Teorema VI:* Si desde el punto más bajo o el más alto de un círculo construido sobre la línea del horizonte, se construyen dos planos inclinados que se apoyan en la circunferencia, los tiempos de descenso a lo largo de los dos planos serán iguales.



Veamos la demostración con sus propias palabras:

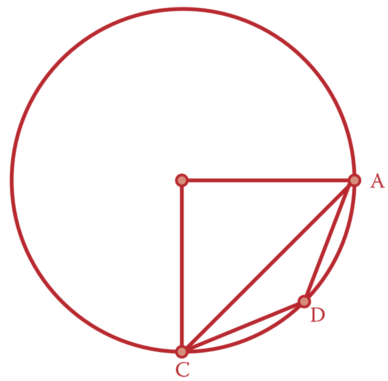
> Construimos una circunferencia sobre la línea del horizonte *GH*; desde el punto más bajo tangente a la línea del horizonte *F*, elevamos el diámetro *FA*, y desde el punto más elevado *A* trazamos planos inclinados cualesquiera *AB*, *AC*, hasta cortar a la circunferencia. Yo digo que los tiempos de descenso a lo largo de estos planos inclinados son iguales. Tracemos *BD* y *CE* perpendiculares al diámetro, y sea *AI* la media proporcional entre las alturas *AE* y *AD* de los planos.
>
> Como los rectángulos *FAE* y *FAD*[i] son iguales a los cuadrados de *AC* y de *AB*[ii], y por otra parte el rectángulo *FAE* es al rectángulo *FAD* como *EA* es a *AD*, se deduce que el cuadrado AC es al cuadrado AB como la línea *EA* es a la línea AD. Pero *AE* es a *AD* como el cuadrado de *AI* es al cuadrado de AD: por tanto los cuadrados de las líneas *AC* y *AB* son entre ellos como los cuadrados de las líneas *IA* y *AD*, y por lo tanto AC es a AB como *AI* es a *AD*.
>
> Pero hemos demostrado antes que los tiempos de descenso a lo largo de *AC* y de *AB* están en razón igual al producto de de las razones de *AC* a *AB* y de *DA* a *AI*, lo que equivale a la razón de *BA* a *AC*. Por consecuencia, la razón de los tiempos de descenso a lo largo de *AC* y de *AB* es igual al producto de las razones de *CA* con *AB* y de *BA* con *AC*; la razón entre los tiempos es por tanto la unidad: de donde resulta nuestra proposición.

Como consecuencia, casi inmediata, que planteamos como un reto al avispado lector, Galileo nos plantea este problema:

Demostrar que la inclinación que debe darse a un plano de manera que una bola que parta de un punto A alcance un plano horizontal en el menor tiempo posible es de 45º.

Al final de la *Jornada*, (las conferencias de la época eran más largas y más intensas que las actuales) a Galileo aún le quedan fuerzas para demostrar que es posible acelerar ese descenso. ¿Cómo?: sustituyendo el plano inclinado por la combinación de dos planos inclinados.

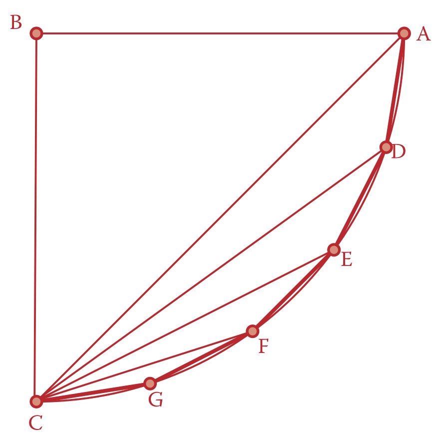
> Teorema XXII: SI desde el punto más bajo de una circunferencia vertical se eleva un plano inclinado que abarca un arco igual a un cuadrante, y si de los extremos de ese plano se trazan otros dos planos hacia un punto cualquiera del arco, entonces los tiempos de descenso a lo largo de estos dos planos tomados juntos será más breve que sobre el primer plano, o que sobre uno de los dos solamente, a saber, el plano inferior.



Es decir, Galileo demuestra que si sustituimos el segmento *AC* que forma 45º con la horizontal por dos segmentos consecutivos *AD* y *DC*, siendo *D* un punto cualquiera del cuadrante.

Animado por este resultado y aplicando el mismo razonamiento a cada uno de los dos segmentos construidos Galileo va más allá y divide al cuadrante *AC* en n partes iguales y afirma que esta línea poligonal hace el descenso más rápido cuanto más puntos incluya. Y aumentando hasta el infinito el número de puntos concluye:

> Escolio: Según la demostración precedente, parece posible concluir que el movimiento más rápido posible entre dos puntos no se produce a lo largo de la línea más corta, es decir a lo largo de una línea recta, sino a lo largo de un arco de circunferencia



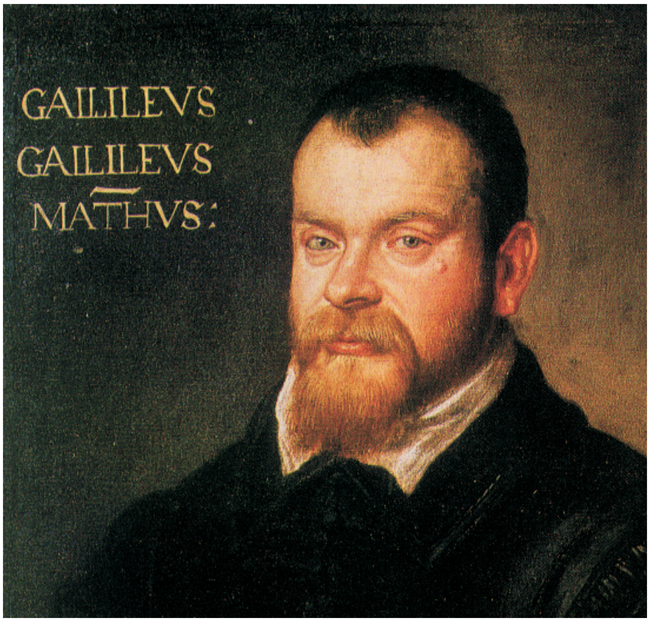
Galileo nos proporciona una bella demostración, que reproducimos íntegramente:

> En el cuadrante *BAEC*, en el que el lado *BC* es perpendicular al horizonte, dividimos el arco *AC* en número cualquiera de partes iguales *AD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GC*; desde el punto C trazamos líneas rectas hacia los puntos *A*, *D*, *E*, *F* y *G*: es evidente que el descenso a lo largo de las cuerdas *AD* y *DC* es más rápido que a lo largo de la cuerda *AC* sólo o incluso que a lo largo de *DC* partiendo de *D* en reposo. Pero si el móvil parte en reposo de A, recorre más rápidamente *DC* que las dos cuerdas *AD* y *DC*, y partiendo en reposo de A parece razonable que desciende más rápido a lo largo de las cuerdas *DE* y *EC* que a lo largo de *DC* sólo; desciende más rápidamente por las cuerdas *AD*, *DE*, *EC* que por las cuerdas *AD* y *DC*.
>
> De la misma manera, tras un descenso previo a lo largo de *ADE*, el movimiento tiene lugar en menos tiempo a lo largo de las dos cuerdas *EF* y *FC* que a lo largo de la cuerda *EC*; por tanto el móvil desciende más rápido a lo largo de las cuatro cuerdas *ADEFC* que a lo largo de las tres cuerdas *ADEC*. Por fin, tras un descenso a lo largo de *ADEF*, el movimiento es más breve a lo largo de las cuerdas *FG* y *GC* que a lo largo de la cuerda *FC*, y así el descenso ha sido más rápido a lo largo de las cinco cuerdas *ADEFGC* que de las cuatro cuerdas *ADEFC*. Se ve pues que cuanto más nos aproximamos a la circunferencia por el número de polígonos inscritos, más rápido se realiza el movimiento entre *A* y *C*.
>
> Lo que hemos establecido para un cuadrante vale también para un arco de circunferencia más pequeño; y el razonamiento es idéntico.

¡Genial! Una intuición y un razonamiento impecable.

¿Impecable?... pero falso. Como 60 años más tarde demostrarían Johann y Jacob Bernoulli, Leibniz, L´Hôpital y hasta el mismísimo Newton.

Precioso pero falso. Si. Pero querido lector, ¿serías capaz de encontrar dónde falla el argumento de Galileo? ■



NOTAS

[i] Se refiere al producto $FA \cdot AE$ y $FA \cdot AD$ respectivamente.

[ii] Aplicando el teorema del cateto.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

ÁLVAREZ PÉREZ, J.M. (2006), *Curvas en la historia*, Ed. Nivola

CHABERT J.L. (1993), *Le problème brachistochrone*, Histoire de problèmes, histoire des mathématiques. Ed. Comisión Inter.-IREM

SÁNCHEZ C. Y VALDÉS C. (2001), *Los Bernoulli. Geómetras y viajeros,* Ed. Nivola

SÁNCHEZ C. Y VALDÉS C.(2003), *De los Bernoulli a los Bourbaki*, Ed. Nivola

VAQUERO. J.M. (2003), *Galileo. La nueva Física*, Ed. Nivola