SUMA 54
Junio 2007, pp. 95-99

El problema de Basilea.
El año de Euler: 1707-2007

Sobre la base de un diseño de la RSME

> *Leed a Euler, es el maestro de todos nosotros.*
>
> Pierre Simón de Laplace

Antonio Pérez Sanz
decabezaz@fespm.org

El pasado 15 de abril se cumplían 300 años del nacimiento de uno de los cuatro matemáticos más geniales de la historia, Leonhard Euler. Para mi, los otros tres, y que cada cual elija su orden, son Arquímedes, Newton y Gauss. Si la calificación la hiciésemos atendiendo a la cantidad de los trabajos de primer orden realizados por cada uno de ellos, sin duda Euler ocuparía el primer lugar. A lo largo de su extensa vida Euler produjo más de ochocientos libros y miles de artículos y trabajos. Sus obras completas *Opera Omnia* ocupan más de 80 volúmenes. Sin lugar a dudas es el matemático más prolífico de la Historia. Pero, con ser importante la cantidad de trabajos, el aprecio de los matemáticos contemporáneos y posteriores a él se debe más a la riqueza, originalidad, belleza y genial agudeza de su obra que a su volumen.

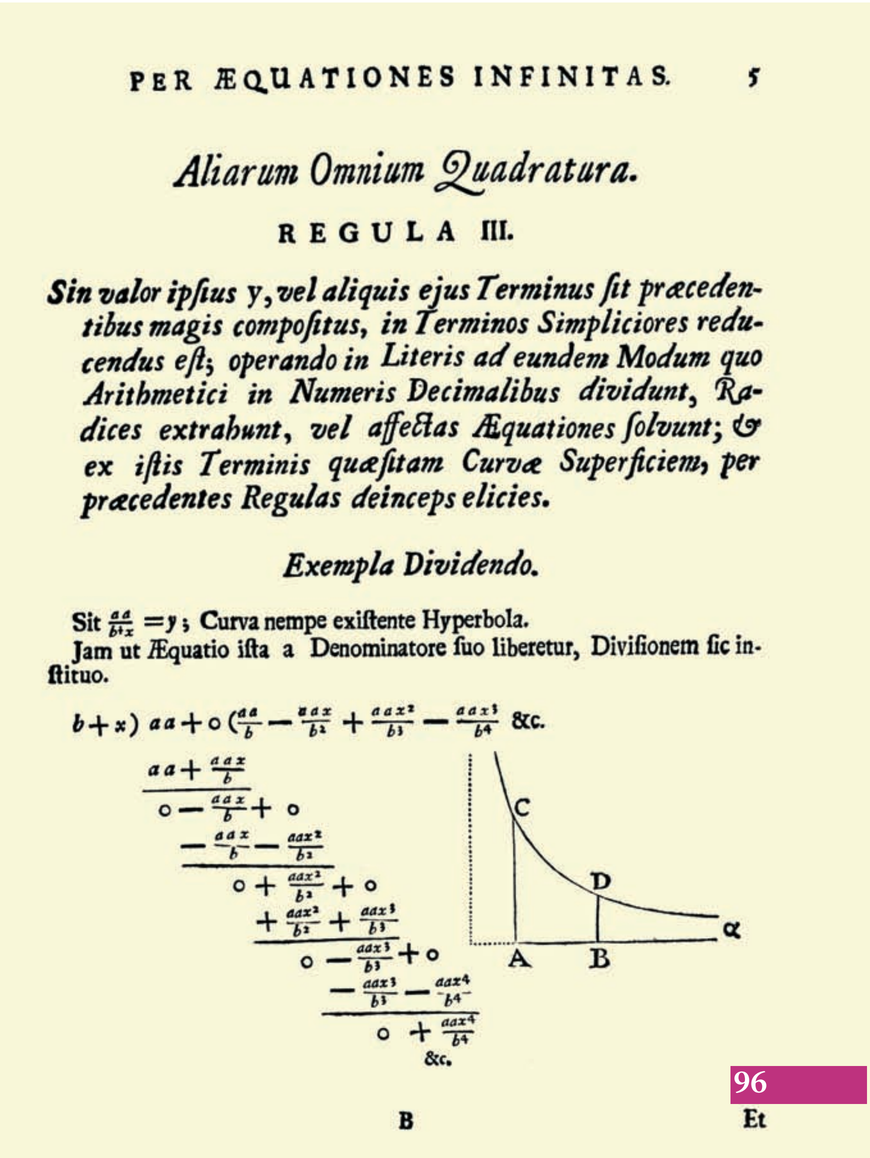
Y sin embargo, Leonhard Euler, un genio equiparable a William Shakespeare, a Johann Sebastian Bach o a Miguel

Angel, es un gran desconocido para el gran público y lo que es peor para muchos estudiantes y profesores de matemáticas. Si los estudiantes de enseñanza secundaria y de los primeros cursos universitarios de matemáticas sospechasen cuántos de los resultados que estudian y aplican se deben al matemático suizo su figura se agigantaría hasta ocupar el lugar que realmente le corresponde, la cima de la Historia de las Matemáticas.

Desde esta sección de SUMA, y continuando con el artículo del número 54, *"Euler. El maestro de todos los matemáticos"* de Santiago Gutiérrez, nos queremos sumar a William Dunham, uno de los más populares divulgadores científicos de la actualidad, que desde hace años viene levantando la bandera de Euler y reivindicando su figura en un más que loable intento, además de justo, de colocarle en el pedestal que le corresponde. Como él, este año de forma especial, encarecemos a los lectores a formar clubes de seguidores entusiastas de Euler, a escribir pancartas y a popularizar la figura de cualquier otra forma de uno de los matemáticos más influyente y más ingenioso que han existido.

Siglo XVII. La fiebre de las series infinitas

En 1668 Nicolás Mercator plantea en su obra *Logarithmotechnia* la posibilidad de cuadrar un arco de hipérbola mediante una serie infinita, obteniendo el desarrollo en serie del logaritmo. Newton había resuelto este problema algunos años antes y así se lo había mostrado a Barrow, pero no sólo para la hipérbola sino para cualquier curva. Para reivindicar la paternidad de sus ideas escribe el tratado *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*[1], que será leído por John Collins en su nombre en una sesión en la Royal Society. Collins aprovechó la ocasión para realizar algunas copias que circularon entre un reducido grupo de personas en Londres. El *De analysi* no se publicaría hasta 1711. Algo similar a lo que ocurrió con el Cálculo, ya que aunque Newton desarrolló su sistema de cálculo diferencial y cálculo integral entre 1670 y 1671 en una extensa *obra Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, esta se publicó en 1727, después de su muerte. El cálculo de fluxiones aparece brevemente en un apéndice de su *Óptica, titulado Tractatus de quadratura curvarum* en 1704.


PER ÆQUATIONES INFINITAS. 5

Aliarum Omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipsius y, vel aliquis ejus Terminus sit praecedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt; & ex istis Terminis quaesitam Curvae Superficiem, per praecedentes Regulas deinceps elicies.

Exempla Dividendo.

Sit $\frac{aa}{b+x}=y$; Curva nempe existente Hyperbola.
Jam ut Æquatio ista a Denominatore suo liberetur, Divisionem sic instituo.

$$b+x)\ aa+0\ \left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\ \&c.\right.$$
$$aa+\frac{aax}{b}$$
$$0-\frac{aax}{b}+0$$
$$-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2}$$
$$0+\frac{aax^2}{b^2}+0$$
$$+\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3}$$
$$0-\frac{aax^3}{b^3}+0$$
$$-\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4}$$
$$0+\frac{aax^4}{b^4}$$
&c.

B Et

De analisi... Newton 1711

En la Regla III, el primer ejemplo resuelto por Newton de cálculo de áreas encerradas por la curva corresponden a la hipérbola

$$y = \frac{a}{b+x}$$

de la que da el desarrollo:

$$y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} \text{ etc.}$$

El área encerrada por la curva, es según bien dice Newton:

$$\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4} \text{ etc.}$$

Está claro que para los valores de $a=b=1$, obtenemos el desarrollo de la función

$$y = \frac{1}{1+x}$$

cuya área corresponderá al desarrollo en serie del logaritmo:

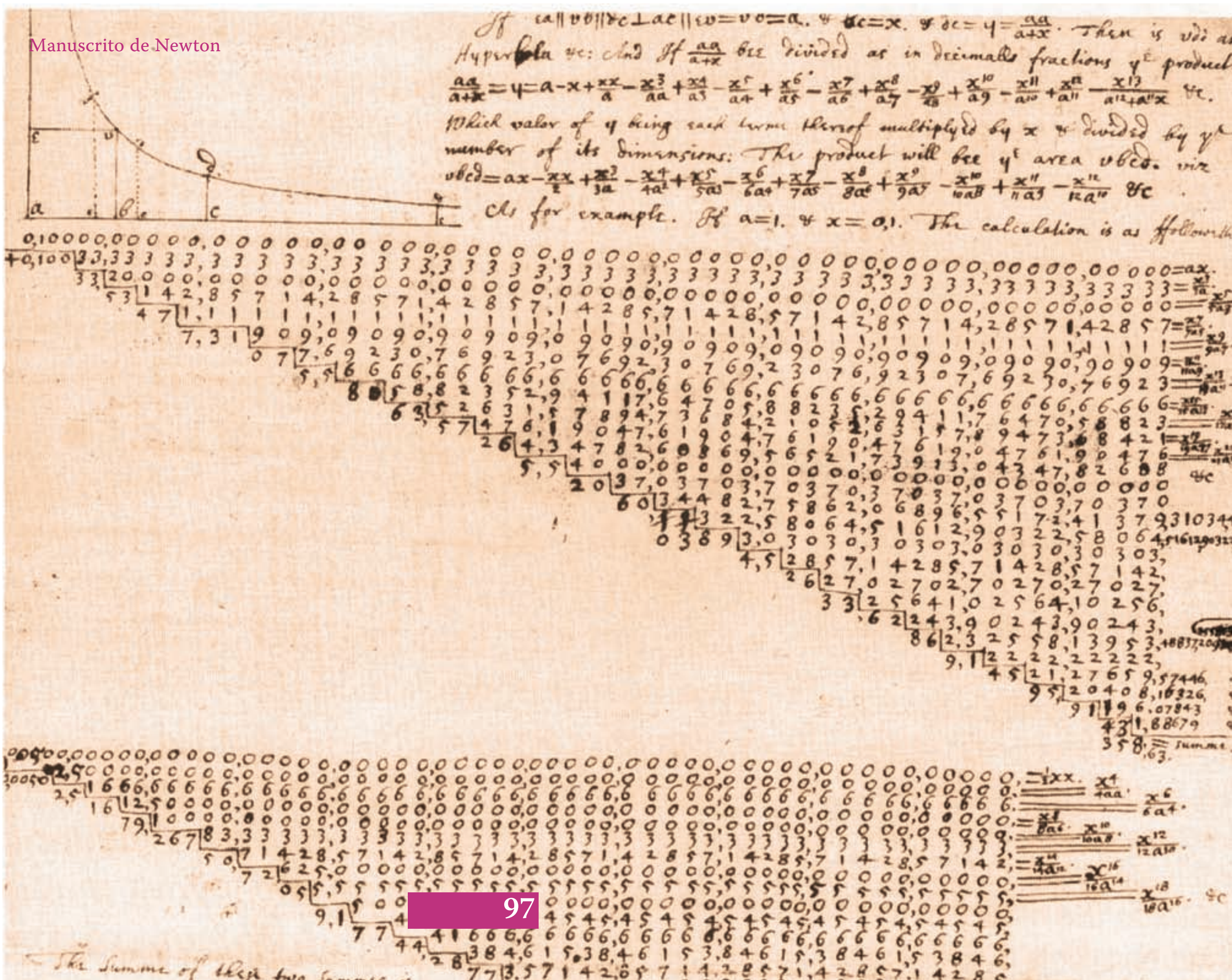
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

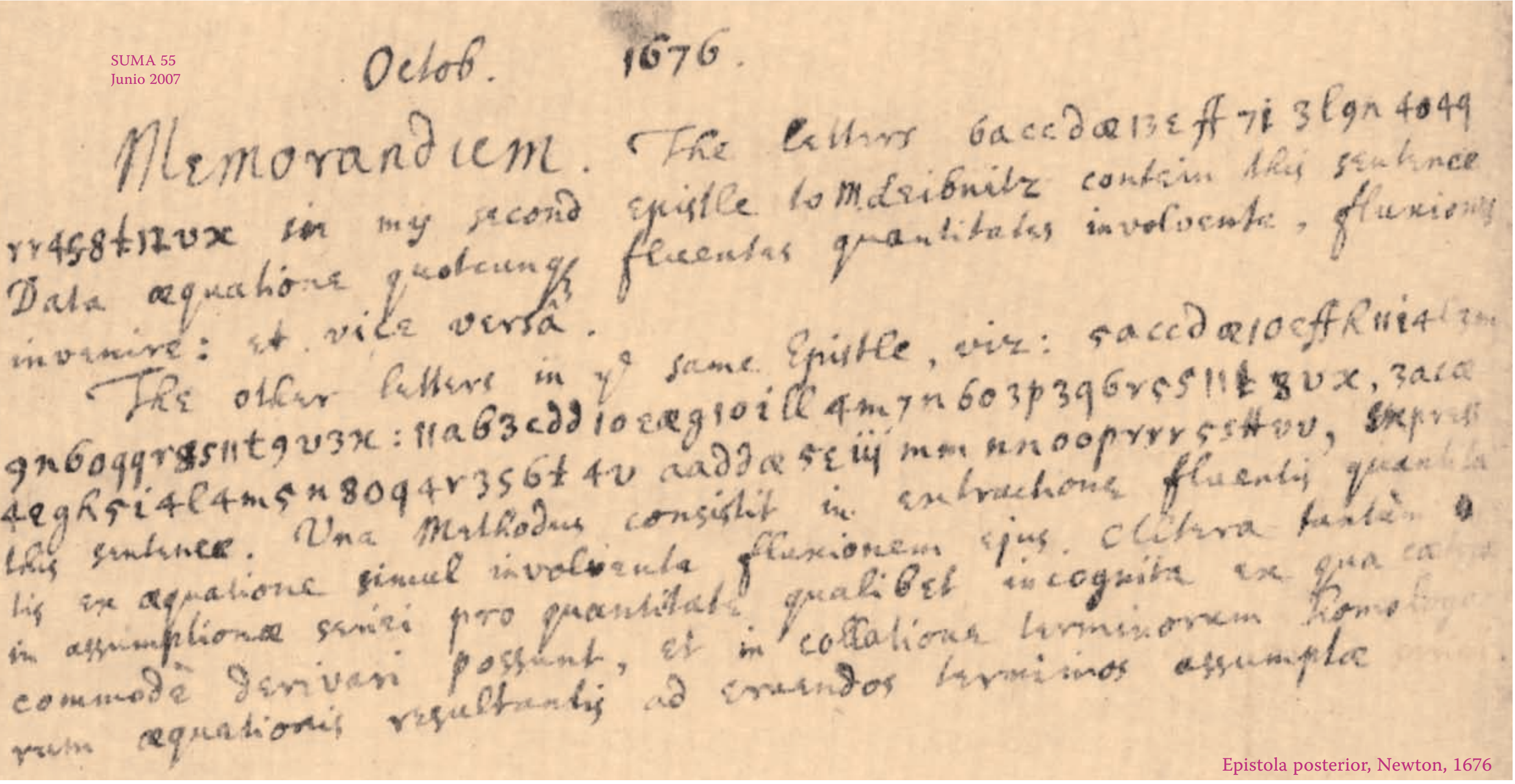
Desarrollo obtenido por Mercator aproximando el área de la curva $\frac{1}{1+t}$ entre 0 y x, mediante n rectángulos de base $\frac{x}{n}$ y altura $\frac{1}{1+\frac{kx}{n}}$ con $k = 1,\ldots n-1$

En la década 1660-70 Mercator y Newton se habían embarcado en el fascinante mundo de las series infinitas. Este último completando el proceso para la extracción de la raíz cuadrada $y=\sqrt{1+x^2}$, aplicando su famoso binomio para exponentes racionales, y para la resolución literal de ecuaciones.

De hecho, el jeroglífico que Newton escribe a Leibniz en la *Epístola posterior*, en octubre de 1676 hace una famosa referencia *encriptadada* al método de desarrollos en series infinitas. Y que en versión de Wallis[2] dice: *la asunción, en lugar de una cantidad incógnita cualquiera, de una serie a partir de la cual puédanse derivar cómodamentelas demás; y en la comparación de los términos homólogos de la ecuación resultante con los términos a descubrir de la serie asumida...*

Leibniz reproducirá el método de coeficientes indeterminados en un artículo publicado en las Acta Eruditorum en 1693, sin citar en ningún momento la información de la *Epístola posterior*, aunque reconociendo a Mercator y a Newton la paternidad del invento. Lo que seguramente viene a demostrar que Leibniz nunca descifró el mensaje cifrado.


Manuscrito de Newton



Epistola posterior, Newton, 1676

La suma de los inversos de los números triangulares

La fiebre de Leibniz por las series infinitas le viene de su viaje a Paris en 1672. Leibniz es un joven abogado, diplomático al servicio del Elector de Mainz, en Alemania, va a quedar deslumbrado por el ambiente artístico, literario y científico que rodeaba la corte del rey Sol. Leibniz se presenta con su famosa máquina mecánica de calcular, diseñada y construida por él mismo y que tantas puertas le abrió en Paris. Allí además de cosechar un notable éxito en los salones más prestigiosos de la Corte conocerá al prestigioso físico y matemático, Christian Huygens.

Huygens sólo acogerá a Leibniz y le pondrá en contacto con el círculo de científicos parisinos notables después de someterle a una prueba de acceso para demostrar su auténtica valía matemática. Y le plantea este reto:

> Calcular la suma de la serie de los inversos de los números triangulares

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \ldots$$

La respuesta de Leibniz, tras unos pocos días, fue original y reflejó una mente ingeniosa, ya que su formación matemática en ese momento era más bien pobre.

$$S = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots\right]$$

Pero podemos escribir esas fracciones de esta otra forma (el ingenio de Leibniz):

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2};\quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};\quad \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4};\quad \frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

Sustituyendo en la serie obtuvo:

$$S = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots\right]$$

O lo que es lo mismo:

$$S = 2\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \ldots\right] = 2 \cdot 1 = 2$$

Como se puede ver en la respuesta la convergencias de las series no era en ese momento la principal inquietud de los matemáticos...

De cualquier manera, Leibniz pasó su examen y los medios científicos y matemáticos parisinos le abrieron sus puertas de par en par y quizás gracias a ello, pudo nacer el cálculo diferencial e integral.

El problema de Basilea. Los malditos inversos de los cuadrados...

En este ambiente matemático, a principios del siglo XVIII las series infinitas pasan a ser uno de los temas estrellas dentro del universo matemático de la época. Estudiar si convergen hacia un número o si se hacen cada vez más grandes será uno de los retos de cualquier matemático que se precie. Y encontrar el número hacia el que converge una serie determinada de cierta dificultad puede aportar reconocimiento a su descubridor.

Jakob Bernoulli ya había demostrado que la serie armónica,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\ldots$$

formada por los inversos de los números naturales, no es convergente.

Si la suma de los inversos de los números triangulares constituyeron un problema fácil para Leibniz, no ocurrió lo mismo con la suma de los inversos de los números cuadrados.

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots$$

El problema le fue planteado a Leibniz por Oldenburg, secretario de la *Royal Society* en 1673, aunque ya había sido abordado veinte años antes por Pietro Mengoli y por el mismo Walis (que dió el valor de 1,645 como aproximación de la suma de la serie). Leibniz se va a estrellar contra el muro de esta serie. Pero no será el único.

En apariencia la solución debe ser tan simple como la de los triangulares. Y así lo pensaron Jakob y Johann Bernoulli, pero pronto se dieron cuenta de que algo iba mal.

La serie llegó a obsesionar a Jakob Bernoulli, que en su *Positiones aritmeticae de seriebus infinitus earumque summa finita* obtiene el resultado de la suma de las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-k^2}\quad \text{con } k\in\mathbb{N}.$$

Nuestra serie es casi de esa misma familia, basta hacer $k = 0$. Jakob consiguió demostrar que era convergente, pero el resultado de la suma se le negaba, hasta tal punto que en esa misma obra lanza publicamente este grito de socorro:

> Grande será nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos.

El genial Euler

¿Quién podría acudir a esta llamada de socorro? Sólo una persona: el genial Euler.

En 1731 Euler calculó la suma de los primeros términos hasta encontrar un resultado con más de 20 decimales.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{1000^2}=1{,}643934\ldots$$

Para ello utilizó la integral $I=\int_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\ln(1-t)}{t}dt$

Que calculó de dos formas distintas.

Por una lado sustituyendo ln(1-t) por su desrrollo en serie y haciendo las integrales de cada término de la serie,

$$\ln(1-t)=-t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}-\ldots$$

obtiene que

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 2^k}\ .$$

Por otro lado, haciendo el cambio z=1−t, y desarrollando en serie el cociente $\frac{1}{1-z}$, la integral queda:

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\ln(1-t)}{t}dt=\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{\ln z}{1-z}dz=\int_1^{\frac{1}{2}}\ln z(1+z+z^2+z^3+\ldots)dz$$

Con unas manipulaciones algebraicas *atrevidas* de estas series infinitas, Euler obtiene:

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 2^k}-(\ln 2)^2$$

Igualando los dos resultados de la misma integral, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2 2^{k-1}}+(\ln 2)^2$$

La serie del segundo miembro converge rápidamente y Euler dispone de los logaritmos naturales de los primeros números naturales con decenas de cifras...

1,643934... Pero, ¿quién o qué era este número?, ¿cómo encontrar la solución del enigma?

Hasta aquí, el problema en términos de suma de una serie infinita rebelde.

1735-36

La genialidad de Euler va a consistir en relacionar esta serie con una función, la función seno, cuyo desarrollo era conocido desde los tiempos de Newton. Y el ingenio, utilizar el desarrollo del seno, no como sumas ,sino como producto de infinitos factores.

Estos desarrollos de productos los usó Euler para calcular la suma de algunas series fijándose en la relación entre los coeficientes de las potencias y las raíces del producto. Esto mismo intentará con la serie de los inversos de los cuadrados. Partiendo del desarrollo del seno:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

Euler introduce la función:

$$P(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \ldots$$

Sacando x factor común, en el desarrollo del seno.

Utilizando el hecho de que los ceros de la función *P(x)* se producen para los valores en que el numerador se anula, es decir para $x = n \cdot \pi$ donde $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

Factoriza

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{-\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right) \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \ldots$$

Compara los términos de segundo grado en ambas expresiones:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \ldots\right)$$

Y despejando:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \ldots + \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3!} = \frac{\pi^2}{6}$$

He encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie que depende de la cuadratura del círculo...
He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia cuyo diámetro es 1.

Leonhard Euler

Así le comunicaba Euler su extraordinario hallazgo a Daniel Bernoulli, el hijo de Johann, en una carta fechada en 1735 o 1736 y lamentablemente perdida. En septiembre de ese mismo año, Daniel le respondía planteándole alguna duda y pidiéndole alguna aclaración sobre el proceso. El mismo Johann le comunicó en abril de 1737 alguna deficiencia, en concreto, la ausencia de una demostración de que las únicas raíces de la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$$

eran las de la forma

$$x = n \cdot \pi \quad \text{donde } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

Nicolás Bernoulli también le criticaría ese salto *sin red* de las relaciones de los coeficientes de un polinomio finito y sus raíces al caso de infinitos términos.

Euler es muy consciente de estas limitaciones pero su alegría es completa, pues él sólo perseguía al fantasmagórico 1,6449340668482264364... y así se lo hace saber a Johann Bernoulli en una carta de agosto de 1737, en la que reconoce que no es una verdadera demostración pero que el hacer el cálculo de la raíz cuadrada de el séxtuplo del valor calculado se obtienen las primeras cifras decimales de π.

Y ya puestos, utilizando las mismas armas, Euler va a encontrar la suma de las series de los inversos de todas las potencias pares de los números naturales.

Todos estos resultados los incorporará en 1748 al capítulo X del tomo primero de la *Introductio In analysin infinitorum*[3]. En la proposición 168 de ese capítulo, un pletórico Euler escribe una de las más llamativas páginas de la historia de las matemáticas:

Se hace patente así que de todas las series infinitas contenidas en la forma general

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

que, cada vez que n fuere número par, se podrían expresar mediante la periferia del círculo π; en efecto, la suma de la serie mantendrá siempre una proporción racional con π.
Para que se perciba más claramente su valor, adjunto aquí varias sumas de tales series expresadas de manera más cómoda.

IN DEFINIEND. SUMMIS SERIER. INFINIT. 131

lem. Quo autem valor harum ſummarum clarius perſpiciatur, plures hujuſmodi Serierum ſummas commodiori modo expreſſas hic adjiciam. CAP. X.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\&c.=\frac{2^0}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1}\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\&c.=\frac{2^2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\&c.=\frac{2^4}{1.2.3....7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\&c.=\frac{2^6}{1.2.3....9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\&c.=\frac{2^8}{1.2.3.....11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\&c.=\frac{2^{10}}{1.2.3.....13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\&c.=\frac{2^{12}}{1.2.3.....15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14}$$

Introductio in analysin infinitorum. Euler

Todo esto es sólo un pequeño botón de muestra de su manera original y atrevida de enfrentarse a problemas nuevos.

Euler consiguió una demostración *rigurosa* de este resultado utilzando el desarrollo en serie de la función *arco seno*, que *sin trampas* le permite obtener la suma de las serie de los inversos de los cuadrados de los números impares:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=$$
$$=\frac{\pi^2}{8}=\int_0^1\frac{\operatorname{arcsen} t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\frac{(\operatorname{arcsen} 1)^2}{2}$$

Con este resultado basta hacer:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)$$

Es decir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Luego $\displaystyle\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$ y despejando $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Y la joya, la solución del problema de Basilea, recupera todo su esplendor. Aunque desde luego, Euler no lo hizo... *de cabeza*.

Reivindicación de Euler

La figura de Euler se hace gigantesca cuando exploramos en cualquier rama de las matemáticas. La cantidad y la importancia de sus descubrimientos nos hacen dudar a veces que puedan ser obra de una sola persona. Aunque Euler no era una persona normal, era un genio. Un genio al que muchos matemáticos actuales, haciendo caso omiso del contexto histórico y científico en el que desarrolla sus descubrimientos, critican por intuitivo y primitivo y carente del rigor necesario. Se olvidan de que, como los propios conceptos matemáticos, el concepto de rigor cambia con los tiempos.

Como dice Dunham, Leonhard Euler fue un inventor, un explorador y un artista. Con un entusiasmo inquebrantable se aventuró por zonas desconocidas; no sólo del mundo físico sino también del mundo interior. Como ocurrió con los grandes exploradores, de vez en cuando tomó el camino equivocado y se olvidó de alguna referencia importante. Sin embargo Euler se merece nuestra total admiración. Trabajando en la semioscuridad de su ceguera, y sólo con el poder de su inigualable imaginación, llegó hasta las fronteras de las matemáticas de su época y las amplió de forma increíble.

Hoy, en cualquier camino matemático que sigamos nos encontraremos tarde o temprano con él, con sus resultados: relación de Euler de los poliedros convexos, teoría de grafos, recta de Euler, constante de Euler, funciones, logaritmos, variable compleja... Y si no aparece alguno de sus resultados compartiremos con él, ignorándolo muchas veces, alguna de sus omnipresentes notaciones: *f(x), e,π, i ...*

De hecho Euler está presente, como si de un guiño de la naturaleza se tratase en la relación más hermosa de las matemáticas; una relación que liga de forma sutil las cinco constantes numéricas universales más populares, los números *0, 1,π, e, i.*

Y que es el compendio de todo el Análisis. Una relación, por supuesto descubierta por el genial Leonhard Euler:

$$e^{\pi i}+1=0$$

Un homenaje que el Universo le hace a las Matemáticas a través de uno de sus hijos más ilustres.
Aún hoy, trescientos años después de su nacimiento, tiene plena vigencia la frase de Laplace

Leed a Euler, es el maestro de todos nosotros.

Y ahora no hay pretexto, en la web **The Euler Archive** puedes encontrar muchas de sus obras:

http://www.math.dartmouth.edu/~euler/ ■

NOTAS

1 *De Analyis per Quantitatum Series, Fluxiones ac Differentias*, Isaac Newton, Ed. facsímil, SAEM Thales y RSME, Sevilla, 2003.

2 Tomo II de las *Opera* de Wallis

3 Edición facsimil y comentada de la SAEM Thales y la RSME.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

CASTRO CHACID, I.(1996): *Leonhard Euler*, Grupo Editorial Iberoaméricano, México DF.

EULER, Leonhard (2000): *Introducción al análisis de los infinitos*,Editores A.J. Durán y F.J. Pérez. SAEM Thales, Sevilla

CONDORCET, Marqués de: *Eulogy to Mr. Euler*
http://www.math.dartmouth.edu/~euler/historica/condorcet.html

DUNHAM, William (2000): *Euler el maestro de todos los matemáticos*, Ed. Nivola, Madrid

DUNHAM, William, (1993): *Viaje a través de los genios*, Ed. Pirámide, Madrid

DURÁN, A.J. (1996): *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo,* Alianza Univ. Madrid.

FUSS, Nicolas: *Eulogy of Leonhard Euler*
http://www.math.dartmouth.edu/~euler/historica/fuss.html

NEWTON, I., (2003): *Análisis de cantidades mediante series, fluxiones y diferencias* Editores Editores A.J. Durán y F.J. Pérez, SAEM Thales, Sevilla.

PÉREZ SANZ, A. Euler, (2001): *Una superestrella*, Documental de la serie *Universo matemático*, RTVE.

SÁNCHEZ, C. y VALDÉS C. (2004): *De los Bernoulli a los Bourbaki*, Ed. Nivola, Madrid .

Las obras de Euler on-line: *http://www.math.dartmouth.edu/~euler/*