

Kurt Gödel: la fuerza de la lógica

ANTONIO PÉREZ SANZ
JOAQUÍN COLLANTES HERNÁEZ

Todo error obedece a factores externos (tales como la emoción y la educación); la razón, por sí sola, no yerra.

Kurt Gödel



14 de enero de 1978

Después de entregarle el original a la enfermera el doctor Greenway se detuvo antes de firmar la copia del acta de defunción tras echarle una última ojeada y subrayó la fecha que aparecía sobre su firma: 14 de enero de 1978; el nombre y las fechas que encabezaban el documento: Kurt Friedrich Gödel, 28 de abril de 1906 – 14 de enero de 1978; y el último párrafo: víctima de desnutrición e inanición provocada por trastornos mentales. Metió la copia en una carpeta en la que con letra casi de manual de caligrafía había escrito el nombre del paciente y la guardó en un archivador, no sin recordar en ese momento cómo se dulcificaba el gesto agrio del que había sido su paciente mientras sus labios intentaban trazar lo que quería ser una sonrisa con la que lo recibía cada vez que entraba en su habitación, dispuesto a jugar la única partida de ajedrez que jugaron juntos.

Todos los médicos y enfermeras de la planta, a la vista del enfermo que acababa de ingresar, reconocieron que nunca habían visto nada semejante. No se explicaban cómo podía seguir vivo aquel anciano que parecía un cadáver viviente, que permanecía sin reaccionar a ningún tipo de estímulo, en posición

En puertas del tercer milenio

fetal desde que lo acostaron en la cama. Pero se sorprendieron al comprobar que sí reaccionaba contra los que intentaban quitarle las gafas o cambiarlo de la posición que él había elegido: sobre el costado derecho y justo al borde del colchón.

Sólo el doctor Greenway supo quién era el paciente que había ingresado de urgencia la mañana del 29 de diciembre en el hospital de Princeton. Y al leer su nombre en la lista de recepción subió inmediatamente a la habitación que le habían adjudicado para encontrarse con un hombre con el cuerpo destruido, un muñeco roto que apenas pesaba 30 kilos y del que, como signo de vida, solamente destacaba el brillo intenso de los ojos miopes tras las gafas que no quiso abandonar ni un solo momento.

El diagnóstico del médico que ordenó su ingreso en el hospital era tan impresionante como contundente. El doctor Greenway leyó:

Sufre desnutrición grave, paranoia aguda con alucinaciones, ataques de pánico, hipocondría y depresión aparecida en un principio en crisis intermitentes para terminar haciéndose aguda. Sufre bloqueo de los conductos urinarios por hipertrofia de la próstata. Durante años se ha negado a aceptar ayuda médica. Ha tenido rachas de normalidad que han ido espaciándose hasta desaparecer en la actualidad, aunque solamente su mente continua intacta en un cuerpo prácticamente muerto. Diagnóstico: muy grave, y a mi juicio, en estado terminal.

El doctor Greenway no tiró la toalla.

—Está usted intentando un imposible. Este hombre no tiene solución, ya está fuera de este mundo.

Sin hacer caso del comentario de su colega, colocó una mesa baja junto a la cabecera de la cama, del lado sobre el que estaba acostado el enfermo. Y sobre la mesa un tablero de ajedrez. Y sobre el tablero, muy despacio, fue colocando las piezas sin quitarle ojo al que todo lo observaba atentamente, a la espera de una reacción que solamente llegaría cuando, con el Rey Negro en una mano y el Rey Blanco en la otra el médico, sonriendo, le preguntó al enfermo:

—¿Negras o blancas?

El enfermo, con un gesto casi imperceptible, señaló la mano que contenía la pieza negra. Cuando, con un hilo de voz, dijo: peón reina, el doctor Greenway

supo que, aunque mínima, aún había esperanza de salvar al hombre que era considerado un genio de las matemáticas.

Así pasaron seis días durante los cuales la partida avanzaba lentamente con claro retroceso de las piezas blancas ante el ataque, tan lento como despiadado, de las piezas negras. Hasta que un día, cuando solamente defendían al rey blanco la reina, un caballo, un alfil, una torre y dos peones, el doctor, al entrar en la habitación se encontró con que el matemático había cerrado los ojos solamente para volver a abrirlos apenas un minuto antes de su muerte, ocho días después. Pero lo que no sabía el médico es que el matemático había abandonado la partida, y la habitación y el hospital para asistir como espectador privilegiado a la rápida película de su vida antes de exhalar su último suspiro.

Su nacimiento, el 28 de abril de 1906 y sus primeros años en Brno, en la actual República Checa, junto a unos padres de posición acomodada, de origen alemán, junto a su neurosis y fiebres reumáticas infantiles, fueron la primera imagen fija seguida, a velocidad de vértigo, por sus años de estudiante de física y matemáticas en la universidad de Viena. Ya en 1928, dentro de sus investigaciones para su tesis doctoral, Gödel focaliza su interés hacia los fundamentos de la matemática. Se sumerge en la lectura de Los elementos de lógica teórica, de Hilbert y Ackherman. Por lo tanto, la obra lógica de Gödel hay que relacionarla desde el principio con el programa formalista de Hilbert. Su tesis doctoral La completitud de los axiomas del cálculo funcional de primer orden, dirigida por Hans Hahn y Fürtwängler y leída en 1930 incorpora su famosa prueba de la suficiencia semántica del cálculo lógico de primer orden... ¡Y solamente tenía 11 páginas! Estas escasas páginas le abrieron las puertas para ejercer como privat-

dozent, profesor sin derecho a sueldo, en la universidad de Viena hasta su marcha a Estados Unidos. Su tesis incluía el:

Teorema de completitud:

En el sistema axiomático de la lógica de primer orden, si una afirmación es verdadera, entonces puede demostrarse.

*la vida diaria requiere
cada vez más conocimientos
matemáticos y tecnológicos.*

Gödel debió dejar atónitos a sus oyentes con afirmaciones tan simples y al mismo tiempo tan sorprendentes como:

—En cualquier sistema formal que incorpore al aparato de la lógica los principios y reglas de la aritmética

elemental hay sentencias bien construidas que no son demostrables, es decir que no se pueden ni refutar ni demostrar, por tanto son indecidibles. Y si añadimos estas sentencias como axiomas, aparecen otras nuevas no demostrables. Es decir, el sistema es incompleto.

Además:

—La consistencia de estos sistemas no puede probarse dentro de ellos mismos.

El Círculo de Viena surgió con el nombre de Sociedad Ernst Mach —figura señera del racionalismo antimetafísico— a partir de las reuniones mantenidas en 1907 entre el matemático Hans Hahn, el economista Otto Neurath y el físico Philipp Frank para hablar, fundamentalmente, sobre filosofía y ciencia con un interés positivista lógico. Su premisa era que lo que no es verificable empíricamente no tiene sentido.

A partir de 1922, y con la incorporación del matemático Moritz Schlick como líder del Círculo, las reuniones del ya definitivamente Círculo de Viena se hicieron cada vez más regulares y numerosas, señalando como objetivo prioritario la propagación de una visión científica del mundo. En 1929 el Círculo preparó un manifiesto en el que se definía como movimiento científico y filosófico, consolidándose como un movimiento fundamental en la historia de la filosofía y la ciencia del siglo XX. En el manifiesto aparecían como miembros:

Gustav Bergmann, filósofo y matemático

Rudolf Carnap, físico y filósofo

Herbert Feigl, filósofo

Philipp Frank, físico

Kurt Gödel, matemático

Hans Hahn, matemático

Victor Kraft, filósofo e historiador

El Círculo de Viena y los teoremas de incompletitud

En la siguiente escena que pasa por su cabeza, a las 16,45 horas del día 26 de agosto de 1930, un Gödel sonriente, abre la puerta de la habitación para entrar en el ambiente ruidoso y ahumado del Café Reichsrat comprobando que, como siempre, llegaba tarde a su cita. Sentados al velador de mármol que consideraban suyo, el que estaba en el rincón del café, junto al ventanal que se abría a la Ringstrasse, le esperaban Menger, Carnap, Feigl y Waismann, entre otros miembros de Círculo de Viena, impacientes por ver el trabajo que Gödel les había asegurado que les mostraría aquella tarde.

Así que, sentándose y dejando la carpeta que llevaba encima de la mesa, a modo de saludo, les espetó a los que esperaban:

—La ciencia no tiene respuestas a todas las preguntas.

Y aunque ya muchos científicos se habían hecho tal pregunta, Kurt Gödel fue el primero en demostrar rigurosamente esta aseveración construyendo su demostración sobre el lenguaje preciso de la lógica simbólica y utilizando el rigor de las matemáticas para demostrar, sin lugar a dudas, que las mismas matemáticas son incompletas.

Karl Menger, matemático
Marcel Natkin, matemático
Otto Neurath, sociólogo
Olga Hahn-Neurath, matemática
Theodor Radakovic, filósofo
Moritz Schlick, filósofo y físico
Friedrich Waismann, filósofo

*Una simple y triste
consecuencia de este resultado
va a hacer tambalear todo el
edificio de las matemáticas: los
axiomas y las reglas de la
aritmética formal son
incapaces de probar por sus
propios medios que están
libres de contradicción*

tonces sería conocido como «teorema de Gödel».

Se trata de un resultado que viene a enterrar de manera definitiva el sueño de Hilbert de dotar a las matemáticas de una formalización completa aceptada universalmente.

Además de los socios habituales, el Círculo contaba con un cierto número de simpatizantes entre los que se destacaban Albert Einstein y Bertrand Russell —residentes en Alemania e Inglaterra, respectivamente—, Ludwig Wittgenstein y Karl Popper, que residieron en Viena pese a no formar parte directa del círculo ni asistir a sus famosas reuniones.

En 1932 Gödel forma parte activa del seminario de lógica de Hans Hahn, el matemático director de su tesis y es asiduo a los Coloquios de Menger (reuniones promovidas por el matemático Karl Menger con el que más tarde Gödel coincidiría en América). Durante estos años las reuniones con el Círculo de Viena serán determinantes para Gödel por la oportunidad de establecer amistad con muchos de sus miembros, amistad que continuaría en Estados Unidos cuando ya la mayoría de sus componentes se habían exiliado allí.

Sobre las sentencias formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y sistemas afines

Marzo de 1931. Un artículo publicado en una revista especializada al alcance de muy pocos, Monatshefte für Mathematik und Physik, el artículo más importante de la lógica matemática del siglo XX, y quizás de toda la historia de la matemática, va a catapultar a la fama mundial entre la colectividad científica a un extraño joven de tan solo 25 años. Y dentro de este artículo, que tan sólo ocupa 26 páginas del número 38 de la revista, un resultado estrella va poner patas arriba todo el panorama matemático de la época: el teorema de incompletitud, que desde en-

El teorema establece que en todo sistema formal deductivo que incluya al menos los principios y reglas de la aritmética existen proposiciones que no se pueden demostrar ni refutar y que, por tanto, son «indecidibles». La existencia de estas proposiciones hace que el sistema sea «incompleto». Una simple y triste consecuencia de este resultado va a hacer tambalear todo el edificio de las matemáticas: los axiomas y las reglas de la aritmética formal son incapaces de probar por sus propios medios que están libres de contradicción. Es decir, que una proposición puede resultar al mismo tiempo verdadera y falsa. En definitiva, que no podemos decidir si el sistema es consistente.

John von Neumann se encargará de darle el espaldarazo definitivo:

—Puesto que has probado la indemostrabilidad de la consistencia como continuación natural de tus resultados anteriores, no publicaré nada al respecto.

Ese año, los cursos de Von Neumann en Princeton tuvieron como tema central los teoremas de incompletitud de Gödel.

1933-1940: cuatro viajes a América

La llegada de Adolf Hitler a la cancillería de Alemania en 1933 provocó que Austria se viera inmersa en la convulsión que facilitaría la posterior anexión al III Reich.

Las vejaciones al profesorado y alumnado judío y a aquellos no afectos al ideario nacional-socialista provocarían en el ánimo de Gödel un sentimiento de frustración que desembocaría en un grave colapso nervioso que precisaría tratamiento durante una breve temporada en el sanatorio de Rekawinkel.

El 6 de octubre de 1933, Gödel, a bordo del Aquitania, llegó a Nueva York. Durante un primer periodo se dedicó a mejorar su inglés y a participar en distintos seminarios para adentrarse en la vida del Instituto de Estudios Avanzados (IAS) en Princeton, impartiendo, además, dos conferencias en Nueva York y Washington. El ambiente liberal de Princeton le impresionó. Gödel volvió a Austria entusiasmado por la noticia que le había dado el director del IAS, Abraham Flexner: le habían concedido una beca de dos mil dólares para que volviera al curso siguiente. La situación que se encontró a su regreso en Viena le hizo recordar a Princeton como el paraíso. El ministro austriaco de educación había establecido que todos los rectores de las distintas universidades y todos los decanos de todas las facultades debían afiliarse al fascista Frente Patriótico. Gödel, por su parte, también sería obligado a afiliarse en mayo de 1935 como única posibilidad de poder continuar en la universidad.

En agosto de 1935 realiza su segundo viaje a Princeton a bordo del Georgia. Y si bien se incorporó al Instituto de Estudios Avanzados hacia mediados de noviembre, apenas empezado el curso sufrió una depresión que lo forzó a regresar a Viena. El claustro de profesores del IAS aceptó la interrupción y acordó que

se reincorporara a su puesto una vez hubiera superado la depresión. Ese mismo año, el matemático Max Newman, dio una serie de conferencias en Cambridge sobre el teorema de incompletitud de Gödel, ya que quedó impresionado por las referencias obtenidas sobre el tema y su autor en el ICM del año 1928. Así, el prestigio de Gödel se afianzó aún más en Gran Bretaña, recibiendo ofertas en sus prestigiosas universidades.

De vuelta en Viena el 10 de diciembre Gödel recordaría siempre el año que le esperaba, 1936, como el peor de su vida, ya que tuvo que ser internado en el sanatorio de enfermedades nerviosas de Rekawinkel. El matemático estaba solo ya que la mayoría de sus amigos y compañeros habían emigrado; su mentor, Hans Hahn, había muerto en 1934 y el profesor Moritz Schlick, había sido abatido a tiros en las escaleras de la universidad por uno de sus alumnos.

El 20 de septiembre de 1938 Gödel se casó con Adele Thusnelda contra la voluntad de su familia, que se negaba rotundamente a admitir en el seno familiar a una mujer divorciada, de religión católica, seis años mayor que él y que trabajaba en el cabaret *Nachtfalter* de Viena. Pero, contra todo pronóstico, tuvieron finalmente que reconocer que su presencia actuaría positivamente en el ánimo y salud de Gödel, y que su papel como paciente esposa sería esencial en sus relaciones, incluso imprescindible durante sus crisis, sobre todo al final de su vida, época en que cuidó a su marido con una dedicación ejemplar, a pesar de que ella, a su vez, estaba gravemente enferma.



Kurt Gödel junto a su mujer, Adele Thusnelda, en 1938

En 1938, en su tercer viaje a América, pudo viajar con un permiso de salida de las autoridades alemanas, imprescindible tras la anexión a Austria III Reich. Pero los barcos hacia Inglaterra y Estados Unidos salían atestados, de tal manera que fue imposible encontrar un segundo pasaje en el New York para Adele, que tuvo que quedarse en Viena. John von Neumann consiguió que Gödel impartiera un seminario sobre Teoría de Conjuntos durante los meses de noviembre y diciembre de 1938,

para pasar después a la Universidad de Notre Dame en South Bend, cerca de Chicago, para impartir allí, en calidad de profesor invitado y de febrero a junio de 1939, cursos de lógica elemental con la ayuda de su amigo vienés Karl Menger, exiliado en 1936.

Ya en Princeton, Gödel se encontró en su ambiente, propiciado por la amistad de von Neumann, Einstein, Morgenstern y otros profesores que había conocido en Austria y Alemania y que ahora estaban refugiados en Estados Unidos y con actividad investigadora y docente en esa universidad.

En Princeton, influenciado por el buen ambiente y la tan necesaria tranquilidad, el matemático trabajó sobre su artículo La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo, que publicaría incompleto, a modo de inicio, en el volumen de noviembre de los Proceedings of the National Academy of Sciences. El artículo completo se publicaría el año siguiente.

De vuelta en Viena, en agosto de 1939, Gödel recibe la temida carta de citación para someterse a la prueba de aptitud para el ejército. El matemático fue consciente de que si estallaba la guerra su salida hacia los Estados Unidos sería prácticamente imposible. Para eludir el alistamiento alegó problemas de corazón motivados por unas fiebres reumáticas, incluso esgrimió imprudentemente su estancia en el sanatorio de Purkersdorf, especializado en enfermedades nerviosas.

Kurt Gödel decidió que la única solución era huir sin que pareciera que huía. A pesar de que él era ario y no tenía que temer la represión desatada contra sus colegas judíos, Gödel despreciaba la actitud agresiva y hostil del gobierno nacional-socialista hacia la cultura y su control asfixiante de la ciencia y la vida universitaria. Los profesores judíos habían sido expulsados de las universidades, los estudiantes afines a la ideología nazi mantenían una estricta vigilancia en una atmósfera de desconfianza y miedo en la que todos vigilaban a todos, ambiente propicio

A pesar de que él era ario y no tenía que temer la represión desatada contra sus colegas judíos, Gödel despreciaba la actitud agresiva y hostil del gobierno nacional-socialista hacia la cultura y su control asfixiante de la ciencia y la vida universitaria

para que se cometieran injusticias y errores como el que sufrió Gödel, al ser tomado por judío y vejado y golpeado mientras paseaba con Adele por el campus de la universidad. Este suceso le convenció de que tenía que abandonar cuanto antes el país. Pero

las cosas no eran tan sencillas. El Ministerio de Educación prohibía a los profesores establecer contactos con centros extranjeros de enseñanza sin la autorización de las autoridades académicas del III Reich. Así que, ante la solicitud de Gödel para volver por cuarta vez a Princeton, el rector de la universidad declaró que, a pesar de la buena opinión que tenía del matemático, disentía enérgicamente de su falta de compromiso con el régimen nacional-socialista. El hecho de que el haber realizado su tesis doctoral con el eminente profesor Hans Hahn, eminente matemático pero judío, era considerado como un agravante en su expediente.

Desde Princeton, era reclamado por John von Neumann (residente en Princeton desde 1930 y miembro del Instituto de Estudios Avanzados desde 1933), por Abraham Flexner, director del IAS desde su fundación hasta 1939 y por su sucesor Frank Aydelotte que ocuparía el cargo entre 1939 hasta 1947.

El 19 de diciembre de 1939, Gödel y Adele obtienen por fin los pertinentes permisos de salida por parte de las autoridades alemanas, y la visa de inmigrantes sin cuota por parte de las autoridades americanas, los dos documentos imprescindibles para su cambio radical de vida. Pero las cosas se complicaron aún más al llegarles la inquietante noticia -medio rumor, medio noticia sin confirmar- de que al ser ciudadanos alemanes (Alemania ha-

bía invadido Polonia el 1 de septiembre señalando el comienzo de la II Guerra Mundial) podrían ser arrestados en el mismo barco mientras trataban de cruzar el Atlántico. Decididos a salir de Alemania como fuera, optaron por elegir el recorrido más largo hacia América a través del territorio ruso después de obtener, el 12 de enero de 1940, los correspondientes visados de las autoridades soviéticas. Así, atravesaron Letonia y Lituania hasta Vladivostok para trasladarse a Moscú como etapa previa, para dirigirse a Yokohama, viajando en el transiberiano. El largo rodeo los llevó hasta el puerto chino para embarcarse en el *President Cleveland* con destino a San Francisco, lo que suponía desembarcar en América justo en el puerto opuesto al que hubieran deseado. Por fin, el día 4 de marzo de 1940 Kurt Gödel y su esposa, agotados tras dos meses de viaje, pisaron el continente en el que residirían hasta su muerte.

La casa definitiva: 129, Linden Lane

Gödel se afincó en Princeton. Desde 1940 hasta 1946 como miembro ordinario del IAS; en 1946 pasará a ser miembro permanente, en 1948 adquirió la nacionalidad americana y en 1953 es elegido miembro de la National Academy of Sciences lo que provocaría que, al fin, el Instituto de Estudios Avanzados reconociera su status de profesor titular, algo que su amigo von Neumann venía reclamando desde su llegada. Sus excentricidades de aquella época retrasaron tal nombramiento ya que el claustro de profesores se preguntaba si lo que ya era clara paranoia de su compañero, no acabaría siendo peligrosa para la marcha del centro e incluso para ellos. Cuando finalmente decidieron –con la oposición de varios miembros del claustro– conce-

derle la plaza de profesor titular, especificaron en su contrato que en caso de enfermedad se podría retirar con una pensión adecuada.

El mes de septiembre del año 1949 Gödel y Adele compraron, gracias a la ayuda de Oppenheimer, la que sería su casa definitiva, en el número 129 de Linden Lane, en Princeton. A su vuelta de un viaje a Europa, para visitar a los supervivientes de su familia, Adele encontró a su marido en buen estado de salud y ánimo. Instalados ya en la nueva casa disfrutaron de un periodo de equilibrio sin poder imaginar que no era más que una prórroga, un periodo de inesperada tranquilidad que permitiría a Adele ocuparse de todo lo relativo a la puesta a punto de su nuevo y definitivo hogar, y a Gödel centrarse en sus trabajos con una salud y, sobre todo, un equilibrio casi olvidado. Por aquella época Gödel dejó a un lado sus trabajos sobre lógica y se orientó, influenciado por su colega y amigo Einstein, hacia la filosofía y la física, discutiendo con él aspectos filosóficos y matemáticos de la Teoría de la Relatividad, a la vez que se ocupaba de la cosmología relativista, buscando y encontrando, además, soluciones sorprendentes a las ecuaciones del campo gravitatorio de la relatividad general que sorprenderían al mismo Einstein. Gödel publica, también en 1949, en *Reviews of modern physics* el artículo titulado *Un ejemplo de un nuevo tipo de soluciones cosmológicas a las ecuaciones del campo gravitatorio de Einstein*, el que pone de manifiesto la existencia de soluciones cosmológicas en las que no se puede



Adele y Kurt en su casa de Linden Lane (Princeton, 1949)

definir un tiempo absoluto, abriendo la posibilidad teórica de viajar a cualquier región del pasado, presente y futuro y regresar a la posición inicial.

En agosto de 1950 presentó en el Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) de Cambridge, Massachusetts, en su trabajo titulado Universos rotatorios en la teoría general de la relatividad, nuevas soluciones de las ecuaciones del campo gravitatorio, que determinan diversos universos posibles, todos ellos rotatorios, espacialmente homogéneos y finitos en los que la existencia de líneas cerradas de tipo temporal depende la rotación.

En 1951 todo pareció volverse negro. Gödel, después de una temporada que podría calificarse de normal, cayó en una profunda depresión a causa de una hemorragia por ulcera de duodeno que necesitó urgente hospitalización. El sueño de que los problemas de salud se hubieran terminado estallaron en pedazos, y a pesar de los cuidados de su esposa el matemático adelgazó considerablemente pues se alimentaba prácticamente sólo con papillas de bebé.

Por esas fechas se estableció el Premio Einstein que tendría carácter trianual. En esa primera convocatoria el premio sería compartido entre Julian Schwinger y Kurt Gödel. Para Gödel la noticia supuso una inyección de optimismo no sólo por el prestigio del premio en sí, sino también porque los 15.000 dólares de dotación que lo acompañaban supondrían una ayuda estimable para sus continuos gastos médicos. El 14 de marzo de 1951, en la ceremonia de entrega del premio, Oppenheimer presentó a Julian Schwinger y disertó sobre su obra, mientras que von Neumann lo hacía sobre la de Gödel, incidiendo en la



Albert Einstein y Kurt Gödel

importancia de los teoremas de incompletitud y en que este trabajo fuera al fin valorado como se merecía, añadiendo, antes de que una cerrada ovación de los presentes confirmara sus palabras, que la obra de este lógico genial marca un hito en la historia de la ciencia. Einstein entregó los galardones personalmente y al imponérselo a Gödel, exclamó:

—Éste, mi querido amigo, es para ti, aunque no lo necesites.

En junio de 1951 la Universidad de Yale le concede un doctorado honoris causa, y en diciembre es invitado por la American Mathematical Society para hablar en la prestigiosa conferencia Gibbs como el primer lógico al que le ofrecían tal honor. En dicha conferencia, titulada Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de las matemáticas y sus implicaciones filosóficas, el matemático meditaba sobre la relación de su obra con el conocimiento humano con argumentos no matemáticos, sino filosóficos. En 1952 la Universidad de Harvard le concedió el doctorado honoris causa con una mención como el descubridor de la verdad matemática más significativa del siglo XX.

Paseando con Einstein

Durante años el físico y el matemático pasearon juntos todos los días. Y formaban parte del paisaje de Princeton recorriendo el camino que iba de Fuld Hall hasta Olden Farm. Habían congeniado desde el primer momento, cuando Gödel llegó a Princeton en 1933 en su primera visita como profesor invitado. Y tras su incorporación definitiva en 1940 se harían inseparables a pesar de los veintiocho años de diferencia que los separaban y de sus caracteres antagónicos: Einstein era extrovertido, alegre y reía por todo; mientras que Gödel era

introvertido, profundamente serio y solitario.

Gödel era de los pocos colegas de Princeton al que Einstein consideraba como un igual. Los dos amigos hablaban de ciencia pero también sobre música, política o religión, temas en los que ambos coincidían. Einstein, en alguna ocasión aseguró: Si voy a mi oficina en el Instituto de Estudios Avanzados es únicamente para tener el privilegio de volver luego a casa paseando con Gödel. Una peculiar pareja hacia la que todos se volvían a su paso.

Es muy conocida la anécdota ocurrida en el año 1947 cuando Gödel se nacionalizó norteamericano. Al llevar siete años como residente en los Estados Unidos, sus amigos lo convencieron para que adoptase la nacionalidad de su país de acogida. Como todo solicitante, Gödel debería demostrar tener un conocimiento general del contenido de la Constitución Americana respondiendo a unas sencillas preguntas. Además, necesitaba dos avalistas que respondieran de su reputación y lo acompañaran al examen oral ante un juez local. Gödel se presentó con dos padrinos de lujo: Albert Einstein, sobradamente conocido y respetado, y Oskar Morgenstern.

El juez que tenía que examinarlo era amigo de Einstein, pero Gödel no quiso privilegios y preparó el examen concienzudamente. Tanto que... encontró resquicios en el entramado legal que hacían de la Constitución Americana un sistema inconsistente que permitiría la instauración de una dictadura en el país. Morgenstern le contestó que eso era algo completamente absurdo y que bajo ningún concepto debía mencionarlo en la entrevista ante el juez, ya que pondría en peligro la obtención de la nacionalidad. Cuando llegó la tan esperada cita, Einstein y Morgenstern insistie-

... encontró resquicios en el entramado legal que hacían de la Constitución Americana un sistema inconsistente que permitiría la instauración de una dictadura en el país

ron en que se limitara a presentarse, dar las respuestas de rigor y los tópicos aprendidos de memoria y se fuera con la nacionalidad recién adquirida en el bolsillo. Pero las sospechas de los padrinos, como se vería, no eran infundadas. El juez Philipp Forman,

impresionado por la categoría intelectual de los testigos, comenzó la entrevista diciendo:

—Hasta ahora usted tenía la nacionalidad alemana.

A lo que Gödel contestó:

—Perdone, señor juez: austriaca.

Y el juez, sin inmutarse, añadió:

—Ah, ya. De todos modos su país tuvo que sufrir una horrible dictadura. Afortunadamente, eso no puede suceder en América.

—¡Todo lo contrario! —exclamó Gödel. Yo sé cómo puede ocurrir. Y puedo probarlo.

Y comenzó a disertar con vehemencia sobre el mecanismo que había descubierto en el texto de la Constitución hasta que el juez, probablemente advertido con anterioridad por Einstein, le interrumpió:

—Tampoco creo que sea cuestión de meternos en honduras...

Y comenzó a hacerle las preguntas rutinarias. Es un misterio qué fue lo que Gödel había descubierto.

La década de los sesenta fue para Gödel la época de prestigiosos reconocimientos. En 1968 fue elegido miembro extranjero de la Royal Society, ya que el año anterior había sido nombrado miembro honorario de la London Mathematical Society a la vez que el prestigioso Amherst College le concedía un doctorado honoris causa.

Sin embargo, dos años antes, en 1966, había rechazado vehementemente la propuesta de nombramiento como miembro honorario de la Academia Austriaca de Ciencias. Este hecho se interpreta como una inequívoca ruptura con su pasado. Más todavía si lo comparamos con el entusiasmo con el que aceptó, en 1961, ser miembro de la American Philosophical Society.

En 1957, el mismo año en que es elegido miembro de la American Academy of Arts and Sciences y cuando aún no había superado la ausencia de Albert Einstein, desaparecido dos años antes, fallece su entrañable amigo Joseph von Newmann, el padre de la teoría de juegos. Von Newmann, como muchos de los primeros investigadores que trabajaron sobre la energía atómica, subestimó el peligro de las radiaciones a que se exponía en los ensayos nucleares y en agosto de 1956 le detectaron un cáncer que acabaría con su vida el 8 de febrero de 1957, a los cincuenta y tres años. Este segundo impacto vino a ahondar el dolor producido por la muerte de Albert Einstein en 1955.

La recta final: 1970-1978

Desde 1970, sus crisis de hipocondría eran cada vez más agudas unidas a rachas intermitentes de euforia en la que hacía todo tipo de planes de trabajo, que quedaban en nada en cuanto volvía la depresión crónica que ya no lo abandonaría. Sufrió alucinaciones y en sus rachas de paranoia aseguraba que tenía pinchado el teléfono, lo que le llevaba a utilizar claves absurdas para hablar con sus amigos, convencido así de despistar a los posibles espías. Como también aseguraba estar vigilado por el FBI por sus opiniones contrarias a la guerra de Vietnam, así como que alguien lo había hechizado por medio de hipnosis.

Su desprecio por el mundo académico va en aumento. Si bien en 1972 había aceptado entusiasmado, en la que sería su última aparición pública, el doctorado honoris causa que, a instancias del profesor Wang, le había concedido la Universidad Rockefeller de Nueva York. También aceptó su nombramiento como miembro de la Academia de Ciencias Morales y Políticas del Instituto de Francia.

En mayo de 1975, la universidad de Princeton decide, al fin, concederle el doctorado honoris causa, un reconocimiento que tantas veces se le había negado. Gödel comenta a sus amigos que llegaba con

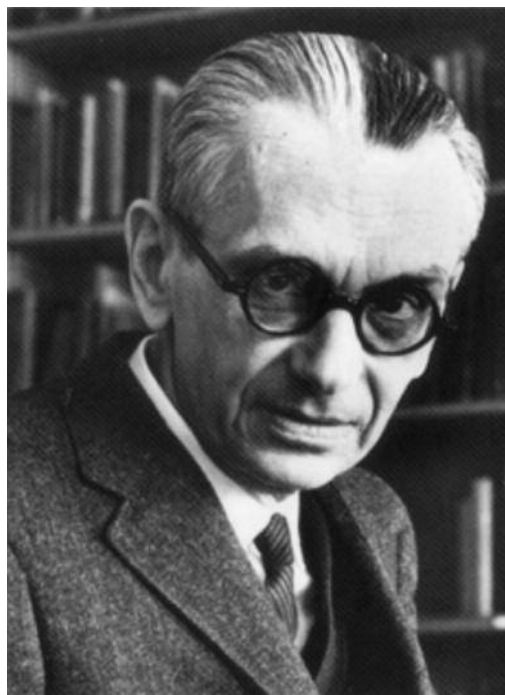
Su peso iba a menos mientras su paranoia iba a más, hasta el punto de que se desentendía de los que lo rodeaban para hablar solamente de sus enfermedades, las reales y las inventadas por su hipocondría

retraso, ya que lo lógico hubiera sido recibirlo al mismo tiempo que sus doctorados honoris causa en Yale y Harvard veinte años antes, en 1951 y 1952, respectivamente. En septiembre de 1972 renunció

también a la Medalla Nacional de Ciencia que debería entregarle en Washington el presidente Gerald Ford.

Durante este año, encerrado cada vez más en sí mismo, solamente comparte sus ideas sobre economía, filosofía y matemáticas con Oskar Morgenstern y Hao Wang. Wang, como fruto de estas reuniones, escribiría sus Reflexiones sobre Kurt Gödel que tanto aportó al conocimiento de la vida y obra del matemático; y también las obras *De las matemáticas a la filosofía* y *Un viaje lógico: de Gödel a la filosofía*.

Ante la insistencia de Adele, su mujer, y de Hao Wang, el único amigo que le quedaba en quien poder confiar, Kurt Gödel cedió y permitió que le hospitalizaran. Así,



el 29 de diciembre de 1977, **Su tesis doctoral tenía tan solo**

11 páginas

ingresó en el hospital de Princeton, el mismo en el que 22 años antes había fallecido Albert Einstein, su mejor amigo desde que llegara a Estados Unidos. Hao Wang se dio cuenta de la gravedad de la situación nada más entrar en el hogar de los Gödel. Pulcro y cuidado hasta extremos exagerados hasta entonces —y de dudoso gusto estético en la decoración, según el juicio general de quienes lo visitaban—, aparecía ahora como si hubiera sido abandonado por los dos ancianos que recibieron al recién llegado como si no fueran conscientes de su presencia, como si no lo vieran. Cuando Wang consiguió al fin que Adele reaccionara estuvieron de acuerdo en que la única solución para salvar la vida del matemático era su ingreso urgente en un centro hospitalario.

Wang, lógico, filósofo y matemático chino-americano, llegó a la Universidad Rockefeller de Nueva York en 1967, contratado como profesor de lógica. Impresionado por los trabajos de Gödel le haría continuas visitas a Princeton hasta establecerse entre ambos una sólida amistad.

El punto de inflexión en la vida de Gödel se había producido unos meses antes de su ingreso en el hospital, pues en julio del mismo año, 1977, habían tenido que ingresar a su mujer Adelle. Durante los meses que estuvo internada, Gödel se despreocupó de su propia salud. Incapaz de desenvolverse en una casa en la que la presencia de Adele era insustituible, abandonó los hábitos imprescindibles, empezando por la alimentación. Los amigos más cercanos, como Morgenstern y Hao Wang, se ocuparon como pudieron, ya que rechazaba toda ayuda. La situación empeoró cuando el 26 del mismo mes de julio, su querido amigo Oskar Morgenstern falleció. Tras conocer la noticia, Gö-

del cayó en un estado de ensimismamiento del que apenas lograrían sacarlo la vuelta de Adele a casa y el

fiel Hao Wang con sus atenciones. Desde la muerte de Einstein, Gödel había convertido a Morgenstern en el inseparable amigo que siempre estaba dispuesto a escucharle cuando sus depresiones lo agobiaban. Entonces Gödel reclamaba con vehemencia la presencia de este matemático nacido en Silesia, que había estudiado también en la Universidad de Viena, donde había conocido a Gödel, y que había emigrado a Estados Unidos durante la II Guerra Mundial, estableciéndose en Princeton. En 1944 Morgenstern publicaría conjuntamente con John von Neumann la gran obra por la que sería internacionalmente conocido: *Theory of Games and Economic Behavior*, su teoría de los juegos que tanta influencia tendría en el mundo de la economía.

La larga ausencia de su mujer se dejó plasmar en el cuerpo del matemático, que bajó hasta los cuarenta kilos. Su peso iba a menos mientras su paranoia iba a más, hasta el punto de que se desentendía de los que lo rodeaban para hablar solamente de sus enfermedades, las reales y las inventadas por su hipochondría. Abrumaba a sus amigos telefoneándoles constantemente para pedirles ayuda al sentirse falsamente acosado por la policía, vigilado por seres extraños, acechado por los vecinos y perseguido por médicos que querían inyectarle medicamentos en estado de experimentación.

Convencido de que estaba en marcha una conspiración para envenenarlo hervía varias veces las verduras que comía y el agua que bebía, auto-recetándose toda clase de medicamentos sin hacer caso de los consejos de los médicos conocidos, convencido de que todos formaban parte de la conspiración y de que los medicamentos que le recetaban eran pícaras para mermar sus capacidades físicas y mentales. Su estricta dieta llegó a componerse de un huevo duro y una taza de té por la mañana y una pequeña porción de verdura a la hora del almuerzo. Su estado de debilidad era tal que siempre tenía frío de tal manera que, cuando acudía a su despacho, se arropaba con tres o cuatro jerséis de lana gruesa sobrepuestos, bufanda de lana, guantes y un abrigo

que a veces no se quitaba en todo el día ante el estupor de quienes lo contemplaban vestido así en plena primavera y hasta en verano.

Desde que en el mes de julio de 1976 se jubilara del IAS (Instituto de Estudios Avanzados) como profesor emérito se agudizaron sus problemas de salud y, sobre todo, su paranoia, dado que ahora no entretenía parte de su tiempo en el instituto y se dedicaba obsesivamente a observarse ya que se tomaba la temperatura y la tensión varias veces al día, anotando las incidencias en un cuaderno que siempre llevaba en el bolsillo.

La partida de ajedrez no llegaría a su final. Kurt Gödel había puesto punto final a la partida de la vida. El doctor Greenway estampó su firma en el certificado.

14 de enero de 1978,

Kurt Friedrich Gödel. 28 de abril de 1906 - 14 de enero de 1978;

Causa de la defunción: Desnutrición e inanición provocada por trastornos mentales.

Metió la copia en una carpeta en la que una letra casi de manual de caligrafía había escrito el nombre del paciente, y la guardó en un archivador, no sin recordar en ese momento cómo se dulcificaba el gesto agrio del que había sido su paciente, mientras sus labios intentaban trazar lo que quería ser una sonrisa con la que lo recibía cada vez que entraba en su habitación, dispuesto a jugar la única partida de ajedrez que jugaron juntos.



Tumba de Kurt y Adele en el cementerio de Princeton (Foto: Antonio T. Colombo)

Las 26 páginas más famosas de la lógica matemática

Gödel siempre fue parco a la hora de escribir. Su tesis doctoral tenía tan solo 11 páginas. Sus obras completas ocupan un único y breve volumen del que existe edición castellana de 1981: *Kurt Gödel. Obras completas*, Alianza Universidad.

Los contenidos están separados en cuatro capítulos diferenciados y numerados.

Capítulo 1

Contiene un breve resumen de poco más de tres páginas de las ideas fundamentales del artículo y presenta un esbozo de la idea principal de la demostración del teorema 11. En este resumen Gödel nos sitúa ante la terminología y la notación que va a utilizar:

Las fórmulas de un sistema formal (nos limitamos a un sistema PM – Principia Mathematica–), externamente consideradas son secuencias finitas de signos primitivos (variables, constantes lógicas, paréntesis y signos de puntuación) y se puede precisar fácilmente qué filas de signos primitivos son fórmulas y cuáles no. De igual forma, las deducciones no son sino secuencias finitas de fórmulas (con ciertas propiedades explícitas). Para las consideraciones metamatemáticas resulta indiferente qué objetos usemos como signos primitivos. Usemos números naturales como tales signos. Por tanto, una fórmula será una secuencia finita de números naturales y una deducción será una secuencia finita de secuencias de números naturales.

Con esta idea Gödel aritmetiza el sistema formal permitiendo definir fórmula, deducción o fórmula deducible en términos del propio sistema de los Principia. Define los signos de clase como una fórmula de PM con exactamente una variable libre del tipo de los números naturales y los ordena mediante una relación $R(n)$ que a su vez puede ser definida en el sistema PM. Veamos como hila su argumento:

Sea α un signo de clase cualquiera; mediante $[\alpha, n]$ designamos la fórmula que resulta de sustituir la variable libre por el signo que denota el número natural n en el signo de clase α ...

Ahora definimos una clase K de números naturales del siguiente modo:

$$q \in K \leftrightarrow \neg \text{Bew}[R(q); q]$$

donde $\text{Bew } x$ significa: « x es una fórmula deducible»

Siguiendo el razonamiento de Gödel, existirá un signo de clase σ tal que la fórmula $[\sigma; n]$ significa $n \in K$. Como σ es un signo de clase, le corresponderá en la ordenación un cierto $R(q)$ para cierto número natural q . Gödel muestra que la sentencia $[R(q); q]$ es indecidible, ya que si fuese deducible, sería verdadera y entonces $q \in K$. Pero por la definición de K :

$$n \in K \leftrightarrow \neg \text{Bew}[R(n); n]$$

Es decir, $[R(q); q]$ no es deducible. Lo que supone una contradicción con el supuesto inicial de que era deducible.

Si suponemos que la negación de $[R(q); q]$ es deducible entonces y se verificaría y por tanto $[R(q); q]$ sería deducible. Es decir, tanto $[R(q); q]$ como su negación serían deducibles, lo que es imposible.

Capítulo 2

En este capítulo se hace una descripción precisa del sistema formal P con el que va a trabajar. P es un sistema en el que a los axiomas de Peano se le añade la lógica del sistema PM . Se definen los signos primitivos del sistema: constantes, variables de tipo 1, de tipo 2, de tipo n , signos de primer tipo, de tipo n , los signos de clase, fórmulas, sentencias, los axiomas, etc.

Las constantes son:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{cero} \\ s &\rightarrow \text{siguiente} \\ \neg &\rightarrow \text{negación} \\ \vee &\rightarrow \text{"o"} \\ \Pi &\rightarrow \text{"para todo"} \\ (&\rightarrow \text{signo puntuación} \\) &\rightarrow \text{signo puntuación} \end{aligned}$$

Y se procede a asignar números naturales a los signos primitivos y a las variables de esta forma:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 1 \\ s &\rightarrow 3 \\ \neg &\rightarrow 5 \\ \vee &\rightarrow 7 \\ \Pi &\rightarrow 9 \\ (&\rightarrow 11 \\) &\rightarrow 13 \end{aligned}$$

A las variables de tipo n les corresponden números de la forma ρ^n , donde ρ es un número primo mayor que 13. Así a cada fórmula le corresponde una secuencia finita de números naturales, y viceversa. A cada secuencia finita de números naturales: n_1, n_2, \dots, n_k , se le asigna de forma biunívoca el número:

$$2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \dots \cdot \rho^{n_k}$$

Y a cada secuencia finita de signos primitivos (a cada fórmula) se le asigna biunívocamente un número natural y a cada relación entre signos primitivos o secuencias le asignamos el número natural correspondiente a la relación entre los números naturales asociados a los signos o secuencias originales.

En una digresión Gödel define el concepto de función numérica y de relación n -aria recursiva primitiva y nos da un listado de 46 funciones o relaciones de este tipo que se corresponden con 46 nociones metamatemáticas. A lo largo del capítulo demuestra varios teoremas. El teorema VI es el famoso *Teorema de incompletitud de Gödel* que, adaptado a un lenguaje más prosaico de cómo él lo presenta, puede expresarse de la manera siguiente:

«En el sistema P, aunque lo completemos con nuevos axiomas, hay siempre alguna sentencia tal que ni ella ni su negación son deducibles en el sistema».

Gödel lo demuestra construyendo la famosa sentencia (17 Gen r) que afirma de sí misma que no es decidable.

Capítulo 3

Gödel introduce el concepto de relación (o clase) aritmética. Una relación se llama aritmética si puede ser definida con la sola ayuda de las nociones « + », « · » (adición y multiplicación de números naturales) y de las constantes lógicas:

$$\sim \quad \neg \quad \forall x \quad =$$

donde los dos últimos sólo se refieren a números naturales. Y completa el teorema VI del capítulo anterior con los teoremas VIII y IX que dicen, respectivamente:

Teorema VIII:

En cada uno de los sistemas formales mencionados en el teorema VI hay sentencias aritméticas indecidibles.

Teorema IX:

En todos los sistemas formales mencionados en el teorema VI hay problemas indecidibles de la lógica pura de predicados de primer orden.

Capítulo 4:

Gödel culmina su obra esbozando la demostración del último teorema, el broche final. El teorema XI:

Sea K una clase recursiva primitiva y consistente de FÓRMULAS. Entonces ocurre que la SENTENCIA que dice que K es consistente no es K -DEDUCIBLE. En especial, la consistencia de P no es deducible en P, suponiendo que P sea consistente (en caso contrario, toda fórmula sería deducible).

Gödel esboza una demostración. Sabedor de las consecuencias del mismo, en el último párrafo del artículo, anuncia una generalización y una prueba detallada del teorema XI. Este trabajo nunca se llevó a cabo. Realmente no hizo falta. Nadie se atrevió a poner en duda las conclusiones de este breve, denso, contundente y definitivo artículo.

Referencias bibliográficas

- FRESÁN, J. (2007), *Gödel. La lógica de los escépticos*, Editorial Nivola, Madrid.
- GÖDEL, K. (1981), *Obras completas*, Alianza Universidad, Madrid.
- GÖDEL, K. (2006), *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines*, KRK Pensamiento. Oviedo.
- GRANNEC, Y. (2012), *La Déesse des petites victoires*. Ed. Anne Carrière, París
- HOFSTADTER, D.R. (2007), *Gödel, Escher, Bach*, Tusquets Editores, Barcelona
- NAGEL, E., NEWMAN, J.R. (1999), *El Teorema de Gödel*, Editorial Tecnos, Madrid

ANTONIO PÉREZ SANZ
IES Salvador Dalí (Madrid)

JOAQUÍN COLLANTES HERNÁEZ
SMPM Emma Castelnuovo