XIII JAEM. Granada. 6 de Julio de 2007

Conferencia plenaria

¡MALDITOS SEAN LA REGLA Y EL COMPÁS!

Historias de Matemáticas alternativas

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí. Madrid

4-4-3-3

Estamos en estos días un tanto revueltos los profesores de matemáticas de todo el país. Hace tan solo unas semanas los responsables educativos de las distintas Comunidades Autónomas se han sacado de la chistera la distribución de horas lectivas para secundaria hasta el siguiente cambio legislativo. Y así estamos, que parecemos entrenadores de un equipo de fútbol eligiendo tácticas

- ¿Tú qué tal?
- Yo 4-4-3-4
- A pues yo voy mejor 5-4-4-4
- No me hables, yo soy de Madrid, y al final, ya ves, vamos sobrados; como hemos ganado la liga: 4-4-3-3. Y luego se quejarán de los resultados del informe PISA. Habrá que mandar a los alumnos buenos en matemáticas a estudiar a Cáceres...
- ¡¡País!!

No puedo dejar pasar la ocasión de iniciar esta conferencia con una cita de Platón, nada sospechoso de ser defensor de la LOGSE, un diálogo entre Sócrates y Glaucón sobre la formación de la juventud. Una cita dedicada especialmente a aquellos gobernantes que miopes de espíritu y menguados de inteligencia hipotecan alegremente la formación matemática y científica de los ciudadanos del futuro inmediato.

– *Pues si es tan capaz (la geometría), has de prescribir al máximo a los hombres de tu bello Estado que de ningún modo descuiden la geometría; pues incluso sus productos accesorios no son pequeños.*
– *¿A qué te refieres?*
– *Lo que tu has mencionado: lo concerniente a la guerra; pero también con respecto a todos los demás estudios, cómo comprenderlos mejor, y* ***a que bien sabemos que hay una enorme diferencia entre quien ha estudiado geometría y quien no.***
– *¡Enorme, por Zeus!*

La República. Libro VII. 526d-e, 527a-c

Matemáticas e historia. La ortodoxia

Y ahora, ya para nosotros, maestros en el duro empeño de enseñar matemáticas, quiero que unas hermosas palabras de Miguel de Guzmán marquen el sentido de estas historias matemáticas alternativas que bien pudieron haber cambiado el rumbo de la historia de esta ciencia.

Decía Miguel:

> *"Existen constelaciones de hechos matemáticos que se prestan para hacer de ellos una novela bien interesante. Me pregunto si el tiempo malgastado en muchos de nuestros rollos magistrales en los que tanto abundamos los profesores de matemáticas de todos los niveles no podría invertirse con gran provecho en contar pausadamente alguna de estas historias apasionantes del pensamiento humano."*

Pues, siguiendo su consejo voy a intentar contaros, no tan pausadamente como yo quisiera, unas de esas historias apasionantes con el ánimo de que sirvan de reflexión a la hora de plantearnos los contenidos matemáticos que contaremos a nuestros alumnos el próximo septiembre.

Ninguno de los presentes se atreve a poner en duda, esa especie de biblia matemática, que afirma que:
En el Principio fueron los puntos, las rectas, los ángulos rectos y los círculos... La geometría de Euclides

La Biblia matemática son, en efecto, Los Elementos de Euclides, escritos allá por el año 300 antes de nuestra Era. Y efectivamente, si nos fijamos en los postulados del Libro I, (de los que habitualmente sólo conocemos el famoso quinto), los cuatro primeros van a marcar la historia de las matemáticas hasta nuestros días:

1. *Postúlese el trazar una* ***línea recta*** *desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.*
2. *Y el prolongar continuamente una recta finita en* ***línea recta****.*
3. *Y el describir* ***un círculo*** *con cualquier centro y distancia.*
4. *Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.*
5. *...*

Las críticas más furibundas a Euclides han venido por el quinto postulado, el que he omitido conscientemente, sin embargo hoy vamos a hablar de los otros, en concreto de los tres primeros: los que entronizan en la geometría el uso exclusivo de la REGLA y el COMPÁS.

Los primeros tres postulados afirman que es posible realizar ciertas operaciones geométricas y que las construcciones geométricas que se basan en ellas corresponden a las figuras que podremos dibujar con el auxilio de una regla y de un compás. Todas las construcciones geométricas que aparecen con los *Elementos* se pueden realizar con estos dos instrumentos.

Y aunque no se condenan de forma explícita otras construcciones, estas serán arrojadas para siempre sin remisión del paraíso euclídeo. En concreto aquellas basadas en el movimiento, es decir, las construcciones dinámicas. Aunque el propio Euclides tiene que recurrir a ellas más adelante.

En concreto cuando define los sólidos "de revolución", en el libro XI, no le queda más remedio que hacer moverse a las figuras planas:

Def. 14: *"Cuando, permaneciendo fijo el diámetro de un semicírculo, **se hace girar** el semicírculo y se vuelve de nuevo a la misma posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es **una esfera**"*

Y lo mismo en las definiciones del cono (def. 18) y del cilindro (def. 21).

Habría que recordarle a Euclides y a sus apologetas las célebres palabras de Galileo a los inquisidores: ¡ Y sin embargo,... se mueve! El movimiento es un instrumento válido de construcción geométrica, y no sólo en el espacio.

¿La herencia de Platón?

Aunque Platón (428-347) es un heredero de las matemáticas pitagóricas su concepción filosófica global afecta al papel reservado a las matemáticas en su relación con la naturaleza:

- Las matemáticas constituyen un universo de ideas independientes del mundo de los fenómenos.
- Forman un lenguaje intermedio que permite a partir de lo sensible apuntar al mundo de las ideas.

Platón considera a las matemáticas como «*ciencia liberal y desinteresada*», independiza las matemáticas del pragmatismo empírico y de la utilidad inmediata, liberándola intelectualmente de instrumentos materiales, *porque «tienen la misión pedagógica de formar mentes bien hechas, cumpliendo con el fin propedéutico de servir de introducción al estudio de la Filosofía*».

Vídeo

Orden y Caos: la búsqueda de un sueño.
Serie: Universo Matemático. TV2. 2000
Autor: Antonio Pérez Sanz
Realizadora: Ana Martínez
Distribuidora: RTVE

Extracto del vídeo

La esfera y el círculo, las formas geométricas perfectas, la armonía de la lira, las matemáticas y la música de la mano en la primera victoria del orden sobre el caos.
Platón el famoso filósofo griego fue más allá, llegando a afirmar que Dios, el creador del Universo, utiliza siempre procedimientos geométricos.
Convencido de la actuación de Dios como un geómetra, Platón en su diálogo Timeo, asocia cada principio elemental con uno de los poliedros regulares, los sólidos platónicos:
El fuego, el elemento más ligero, es el tetraedro, formado por cuatro triángulos equiláteros, el sólido regular más sencillo.

El aire, el segundo elemento se compone de ocho triángulos unidos entre sí: el octaedro.
El agua nacería de la unión de veinte triángulos equiláteros. Sería el icosaedro.
La Tierra el elemento más pesado lo formaría la reunión de seis cuadrados, un cubo.
Y termina Platón diciendo:
"puesto que todavía había una quinta composición, el dios la utilizó para el universo cuando lo pintó"
Esa quinta composición es el dodecaedro, un sólido regular formado por 12 pentágonos.
¿Cómo poder sustraerse a la increíble belleza de un modelo geométrico tan armonioso como suprema expresión del orden en el Universo?

En su diálogo Timeo, Platón hace la defensa más poética de la historia de un modelo geométrico para explicar el Universo físico. Un modelo basado en las formas perfectas: círculos y esferas… y poliedros regulares. Y curiosamente en esa misma obra nos dará una clave matemática para explicar la armonía universal:

> *"dios, cuando comenzó a construir el cuerpo del mundo lo hizo a partir del fuego y de la tierra...*
> *...Pero convenía que fuera sólido y los sólidos son conectados por dos términos medios. Así, colocó agua y aire en el medio del fuego y la tierra y los puso en la misma relación proporcional mutua..."*

Timeo. 31b

El Aire y el Agua como "medias proporcionales" entre el Fuego y la Tierra

$$\frac{Fuego}{Aire} = \frac{Aire}{Agua} = \frac{Agua}{Tierra}$$

Pero, quizás sin pretenderlo, introdujo en ese modelo hermoso y poético la maldición de la esfera:

> *"Por tanto, lo construyó (el universo) esférico, con la misma distancia del centro a los extremos en todas partes, circular, la más perfecta y semejante a sí misma de todas las figuras...*
> *...creó a sí un mundo circular, que gira en círculo, único, solo y aislado..."*

Timeo. 33b, 34b

Aristóteles. El reino de las esferas y los círculos

Para Aristóteles (384-322), un poco más realista, el objeto de las matemáticas son las formas extraídas de la naturaleza, es la modelización de las regularidades empíricas que se producen en la realidad. Esta visión va a dominar la historia de las matemáticas hasta bien entrado el siglo XX.

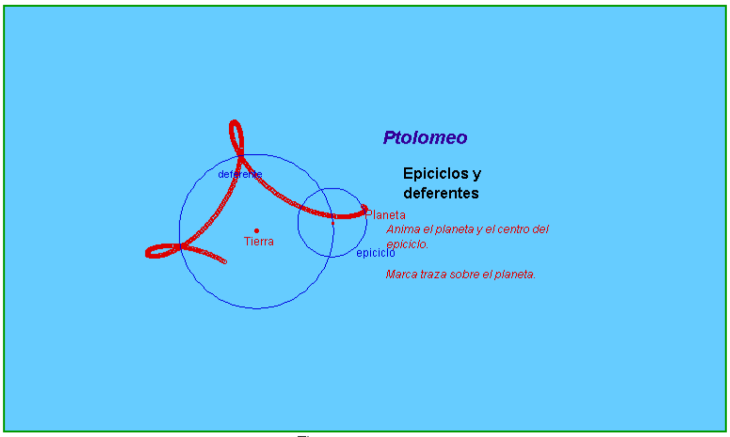
Desde entonces, y tras la aparición de los Elementos de Euclides, los puntos, las rectas, los ángulos, los círculos y las esferas... las formas perfectas, los poliedros regulares van a constituirse en las armas casi exclusivas para interpretar la Naturaleza. Las formas imperfectas, las curvas extrañas, los polígonos no regulares, los sólidos distintos de los conos, los cilindros y las esferas...quedan expulsados del universo matemático.

Vídeo

Orden y Caos: la búsqueda de un sueño.
Serie: Universo Matemático. TV2. 2000
Autor: Antonio Pérez Sanz
Realizadora: Ana Martínez
Distribuidora: RTVE

Extracto del vídeo

Desde Platón la historia de la Ciencia será la búsqueda de ese modelo geométrico, de esas leyes que controlan el funcionamiento del Cosmos, la búsqueda de ese orden inmutable capaz de explicar todos los fenómenos naturales. La comprensión y el dominio de la Naturaleza al alcance del ser humano.
Aristóteles situará la Tierra en el centro del Universo y el frente de batalla entre el orden y el caos en la esfera de la órbita lunar. Por encima de ella el mundo celeste, perfecto inmutable y perpetuo, el reino del orden.
Por debajo el mundo terrestre, constituido por los cuatro elementos Tierra, Agua, Aire y Fuego intercambiándose entre sí; un mundo imperfecto, cambiante e impredecible. El reino del caos.
Pero algo viene a romper esa armonía perfecta del mundo ideal por encima de la Luna. Los planetas conocidos describen órbitas erráticas sobre el fondo de estrellas fijas. De hecho el término planeta significa "errático" o viajero. A veces, incluso parecen retroceder en sus órbitas.
¿Cómo encajar estos hechos con un modelo geométrico ideal? Aristóteles recurre a un modelo físico basado en esferas de éter en las que se mueven los planetas. Estas esferas se van acelerando y frenando unas con otras. El complejo mecanismo necesitaría de 56 esferas distintas para poder explicar los movimientos aparentes de los planetas.
Por desgracia para la Ciencia este modelo, basado en la esfera y el círculo, permanecerá intocable durante dos mil años.
Los matemáticos y astrónomos tendrán que crear auténticas filigranas matemáticas para hacer encajar las observaciones del movimiento de los astros con el modelo aristotélico.
La más conseguida será la de un astrónomo de Alejandría que vivió en el siglo II de nuestra era: Claudio Ptolomeo.
Su obra "Síntesis Matemática" pasará a la historia con el nombre de la traducción árabe: EL Almagesto, que significa "el muy grande".
Para explicar el movimiento de los planetas respetando la idea de que sólo se pueden mover en órbitas circulares Ptolomeo va a inventar un ingenioso modelo geométrico: loe epiciclos y los deferentes.
A cada planeta, incluidos el Sol y la Luna, les asigna un círculo imaginario llamado deferente. La Tierra está en interior de este círculo, aunque no necesariamente en el centro.
El planeta girará en un nuevo círculo llamado epiciclo cuyo centro será un punto del círculo deferente.
A moverse el centro del epiciclo a lo largo de la deferente, al planeta se acerca o se aleja de la Tierra lo que explicaba a la perfección los cambios de brillo de un mismo planeta observados en distintos momentos del año.
Ptolomeo pensaba que en realidad los planetas no se movían así, pero su modelo geométrico explicaba a la perfección lo que cualquier astrónomo veía en el cielo.
Los astrónomos que vinieron tras él tomaron su modelo como un dogma y aplicaron penosos cálculos matemáticos para realizar tablas que predijesen la posición de todos los planetas conocidos.
Uno de las más completas fueron las del rey castellano Alfonso X el sabio. Las famosas tablas alfonsíes.
Su elaboración era tan compleja que le hicieron exclamar al sensato rey Alfonso:
"Si el Señor Todopoderoso me hubiera consultado antes de embarcarse en la Creación, le habría recomendado algo más simple"



Hoy las ideas cosmológicas aristotélico-tomistas nos parecen ingenuas y los intentos desesperados de Ptolomeo por mantenerlas suscitan nuestro admiración y casi nuestra solidaridad intelectual. Sin embargo muchas personas pagaron con su vida por el simple hecho de enfrentarse a ellas o simplemente cuestionarlas.

¿Por qué admitimos de buen grado que las ideas cosmológicas de Aristóteles y sus epígonos supusieron una losa para la astronomía... y en cambio no nos planteamos el freno que pudieron suponer para LAS MATEMÁTICAS?

Las otras Matemáticas

Lo que daremos en llamar las matemáticas alternativas, las "no oficiales", surgen incluso antes que las ortodoxas. Y surgen, cómo no, intentando ofrecer soluciones a problemas concretos. Y en este caso no a unos problemas cualesquiera. Nacen como respuesta a los tres problemas clásicos:

- La duplicación del cubo
- La trisección del ángulo
- La cuadratura del círculo

La duplicación del cubo

Existe una leyenda hermosa que vincula el problema con los mismísimos dioses del Olimpo.

Año 430 a. de C. Una terrible peste castiga Atenas. Una de sus víctimas es el propio Pericles. Los atenienses consultan al Oráculo de Delos. Y la respuesta del Oráculo es... un problema matemático:

> *Construir en el templo de Apolo un altar semejante al existente pero que fuese el doble de grande… El altar tenía forma cúbica*

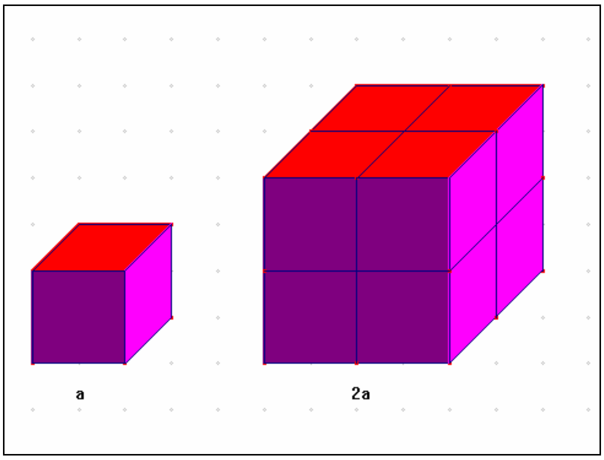
¡Los dioses griegos sabían matemáticas! Es un dato a tener en cuenta, pues quizás en algunas CC.AA. lo podamos utilizar para ofrecernos, los profesores de matemáticas, para impartir la alternativa "religiosa", en forma de historia de las religiones, a las clases de religión ante el déficit horario que comentábamos al principio.

Eutocio, matemático del siglo VI formado en Constantinopla, y desconocido para casi todo el mundo, nos brinda en su obra *Comentarios*, una versión del origen del problema bien distinta, atribuida al mismísimo Eratóstenes. Tiene como protagonista al rey Minos de Creta, el del minotauro, y el objeto a duplicar es, en este caso, el sepulcro de su hijo Glauco:

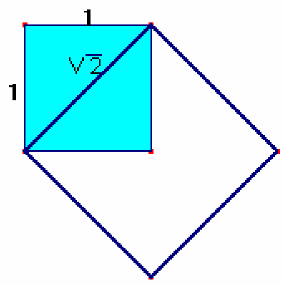
Escaso recinto señalaste para tumba real;
que sea el doble y, sin que pierda belleza,
al punto duplica cada miembro del sepulcro

De cualquier manera, el problema es lo que importa. Y la salsa que lo va a adornar será la maldición "euclidea": utilizando sólo la regla y el compás. Aunque como veremos, esa salsa se añadió mucho más tarde. Y comienza una de las primeras aventuras matemáticas de la historia.

Los atenienses construyeron un nuevo cubo cuya arista era el doble de la original… pero la peste no remitía… El altar no era el doble, era 8 veces más grande.

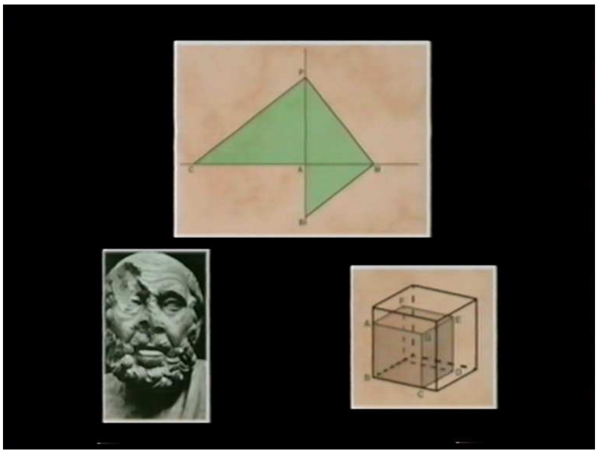


Si se hubiese tratado de duplicar el área de un altar cuadrado, el problema hubiese sido simple de resolver con regla y compás, las únicas herramientas de los matemáticos griegos



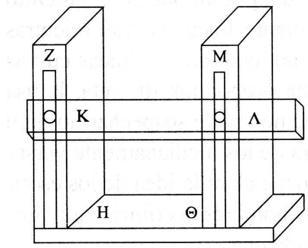
¡Y llegan los matemáticos: Hipócrates de Quíos!

El primero en abordar la cuestión fue **Hipócrates de Quíos**, (s. V A. de C.), quien redujo el problema al de intercalar dos medias geométricas o proporcionales entre la magnitud que representa la arista del cubo primitivo y la correspondiente al doble de la misma…
La misma idea que un siglo más tarde utilizará Platón en el Timeo.



El problema ahora deja de tener que ver con dioses, altares y sepulcros y se convierte en un "simple" problema geométrico: encontrar esas dos medias geométricas entre dos segmentos dados.

Hasta **Platón** se lanzó a la aventura. Y en contra de sus propias ideas sobre el uso de instrumentos materiales, Eutocio nos describe un aparato, conocido como "Máquina de Platón" que permite resolver "artesanalmente" el problema.



Tras esta preparación, póngase uno cualquiera de los catetos del ángulo, HΘ, en contacto con Γ y trasládense el ángulo y la regla KΛ hasta que el punto H esté sobre la recta BΔ —manteniéndose el contacto del cateto HΘ con Γ— y hasta que la regla KΛ esté en contacto con la recta BE por el lado de K y con Λ por el otro extremo, de manera que, como figura en el dibujo, el

[1] Gr. *pelekinoeidésin*: «en forma de pico de pelícano», es decir, «en forma de concavidad alargada». Se trata de un encaje semejante al tipo «cola de milano».

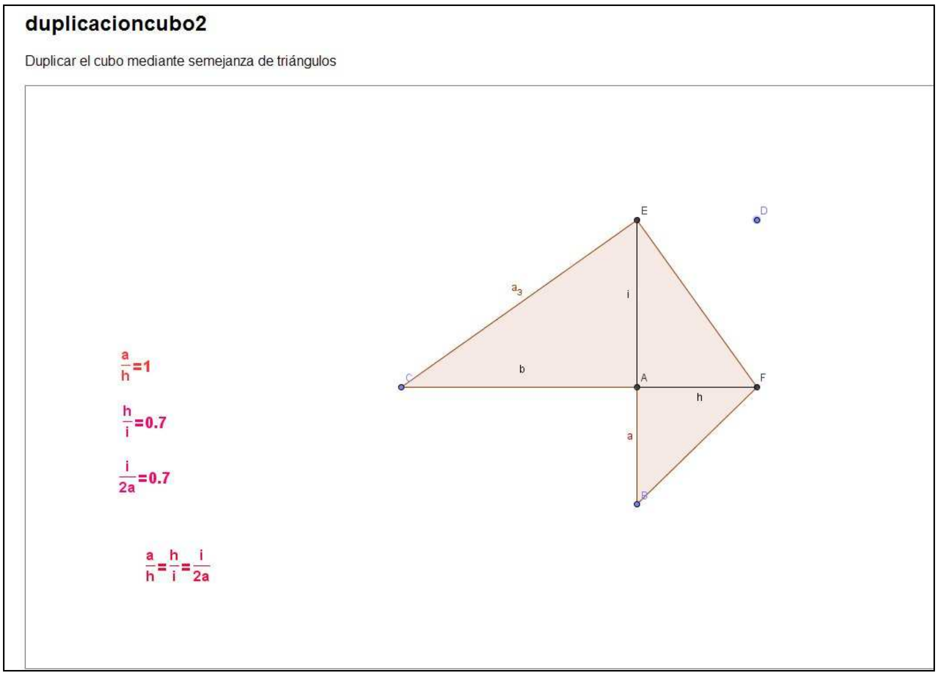
Arquitas simplifica un tanto el problema, dándole una visión exclusivamente geométrica: se trata de construir tres triángulos rectángulos semejantes, como los de la figura, de tal forma que *a* y *b* son los segmentos finales y *h* e *i* las medias a intercalar.

Es decir, sólo hay que encontrar los puntos E y F, vértices de los triángulos que verifiquen la condición:

$$\frac{a}{h}=\frac{h}{i}=\frac{i}{b}$$

En lenguaje más moderno, se trata de encontrar un punto D, cuyas coordenadas (h, i) sean los segmentos pedidos. Pero, ¿cómo encontrar ese punto?

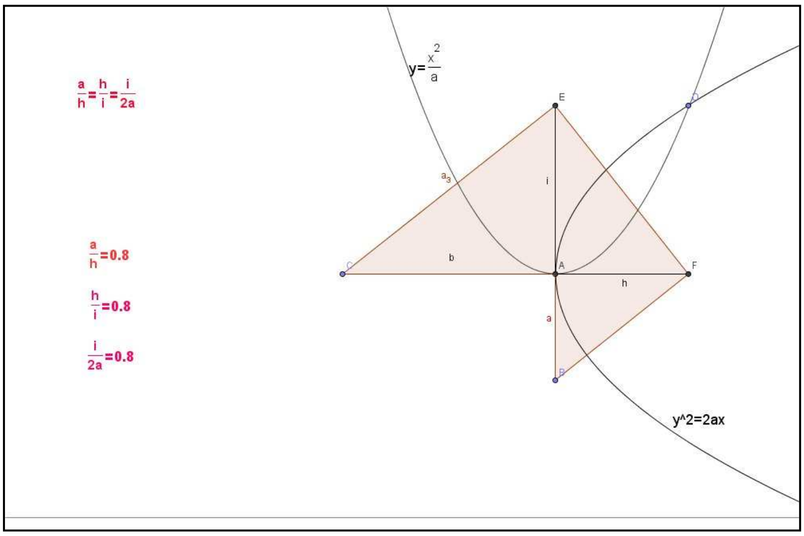
Y va a ser **Menecmo**, el que con sus extrañas curvas, las parábolas nos va a dar una de las más elegantes soluciones al problema de la duplicación:



Si hacemos $b = 2 \cdot a$. La proporción queda $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$

Y en nuestro lenguaje algebraico moderno, despejando x e y, obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{cases} x^2 = a \cdot y \\ y^2 = 2a \cdot x \end{cases}\right\} \Rightarrow x^3 = 2a^3$$



Es decir, Menecmo se dio cuenta de que geométricamente, el problema consiste en encontrar el punto de corte de dos cónicas, de dos parábolas, como en el caso de arriba, o de una parábola y una hipérbola. ¡Las cónicas hacen su primera aparición en la historia...para resolver el problema de la duplicación del cubo!

Alguien podía argumentar en contra que cómo se construye una parábola, pero el propio Eutocio nos da la respuesta:

> "*La parábola se traza mediante el compás inventado por Isidoro de Mileto el Mecánico, nuestro maestro, descrito por él en el Comentario que preparó para el tratado "Sobre los hornos" de Herón.*"

Eutocio. Comentarios. P. 375

Por desgracia para Menecmo y para tantos otros, encontrar el punto de corte de esas dos cónicas es un problema que no se puede resolver con regla y compás, como demostró en 1837 el francés L. Wantzel.

Con la duplicación del cubo, los heterodoxos obtienen su primera victoria sobre los defensores a ultranza de la regla y del compás.

Hipócrates, Platón, Arquitas, Herón, Filón, Diocles, Menecmo, Apolonio, Eratóstenes, Nicomedes... Y crearán escuela... Aunque la victoria total tendrá que esperar más 18 siglos...

Hasta que Kepler construya toda su teoría y descubra las leyes del movimiento de los planetas basándose en las precisas observaciones de Tycho Brahe. La batalla de Marte, la lucha de los cálculos de Kepler contra las observaciones de Tycho va a suponer la derrota definitiva del círculo aristotélico y la victoria de las cónicas de Menecmo y Apolonio. La primera de sus famosas leyes va a traer a la elipse al primer plano de la ciencia:

Primera Ley *Los planetas describen órbitas elípticas en uno de cuyos focos está el Sol.*

A estas alturas nos asalta una duda:

¿No será que la imposición de la exclusividad de la regla y el compás es un invento aristotélico, transmitido a través de Euclides en sus *Elementos* de forma accidental?
¡ Y si la pretendida ortodoxia geométrica fuese sólo UN MITO aristotélico-tomista?

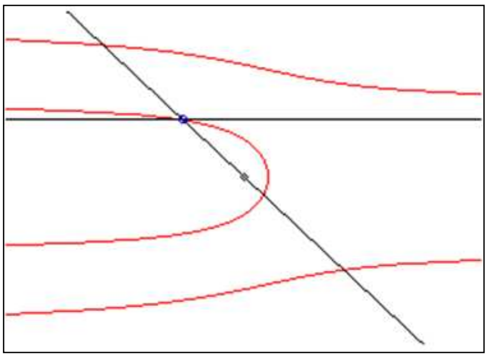
Curvas mecánicas. Para los amantes del bricolaje

Porque hay curvas que sólo se pueden construir mediante combinación de movimientos... ...¡mecánicamente!

- La trisectriz de Hipías y s. V a. de C.
- La cuadratriz de Dinóstrato s. IV a. de C.
- La espiral de Arquímedes. s. III a. de C.

Y, curiosamente, no son fruto del delirio arbitrario de sus descubridores. Son los instrumentos para resolver el segundo de los problemas clásicos: la trisección de un ángulo

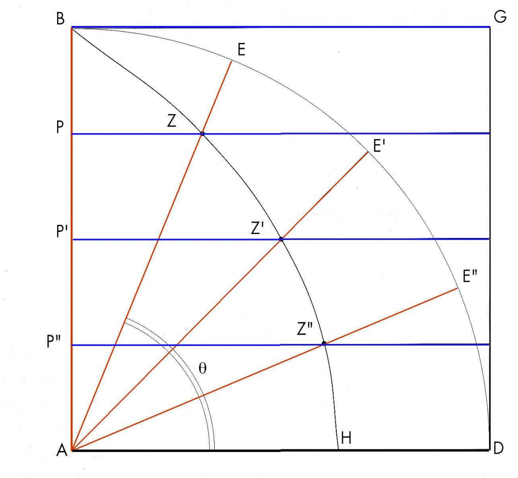
Hipías, en el siglo V a. de C., antes incluso de la invención de las cónicas, va a descubrir una curva que le permite encontrar la tercera parte de cualquier ángulo...



Se trata de una extraña curva generada por el movimiento uniforme de dos rectas, una horizontal con un movimiento vertical uniforme, y la otra girando en torno a un punto con un movimiento angular uniforme. Su ecuación en polares nos indica que no se trata de un objeto simple.

$$r = \frac{2}{\pi} \frac{t}{\sin t}$$

La curva se obtiene mediante los puntos de intersección de dos rectas en movimiento, AB y BG. La primera AB, gira con velocidad angular uniforme sobre el punto A hasta llegar a AD, la segunda BG se desplaza horizontalmente, también con velocidad uniforme, y de tal manera que llega a AD al mismo tiempo que la recta AB.



Los puntos de intersección de ambas dibujan una curva BZZ´Z´´H que es la trisectriz.

Para trisecar el ángulo T basta marcar el punto Z de corte del lado del ángulo con la curva y trazar una paralela al otro lado AD del ángulo para encontrar el punto P. Si dividimos el segmento AP en tres partes iguales mediante los puntos P´y P´´, los puntos de corte de las paralelas a AD por dichos puntos determinan en la curva los puntos Z´ y Z´´. La rectas que se obtienen al unirlos con A dividen al ángulo en tres partes iguales.

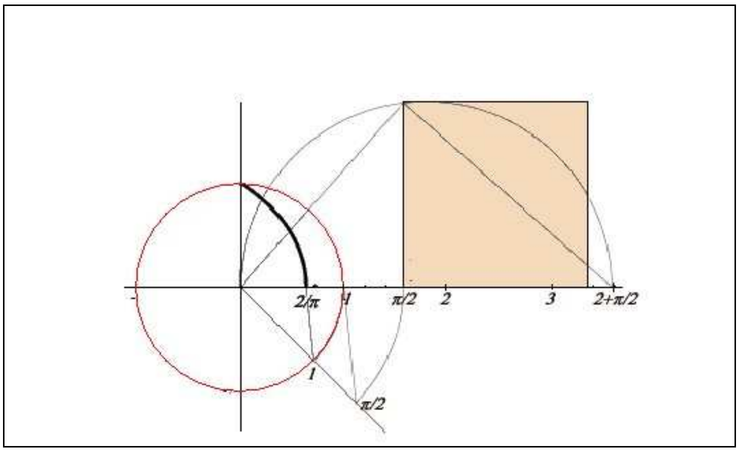
Y además no solo triseca sino que permite dividir cualquier ángulo en n-partes iguales

Y también para la cuadratura del círculo

Un siglo después de Hipías, Dinóstrato, hacia 390 a. de C., curiosamente un hermano de Menecmo el de las cónicas, va a conseguir lo que parece imposible: construir un cuadrado de la misma superficie que un círculo dado. Es decir resolver el tercer problema. Y no con herramientas muy sofisticadas:

Utilizando los teoremas de Thales, de Pitágoras y... la misma curva mecánica de Hipías.

La trisectriz de Hipías es... ¡la cuadratriz de Dinóstrato!



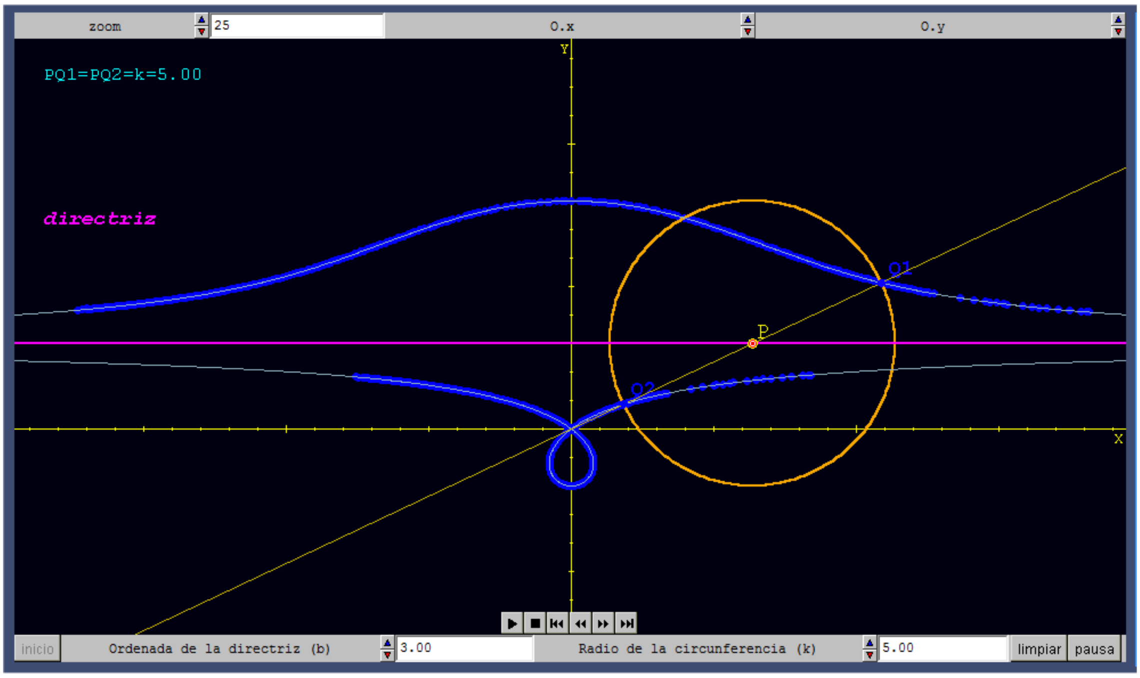
Partimos de un círculo de radio 1 y área π.
La cuadratriz corta al eje *OX* en el punto 2/π,
Por el teorema de Tales obtenemos el punto π/2 , a partir a este punto le sumamos 2 unidades y construimos la semicircunferencia con centro en el eje O*X* y pasa por *O* y por π/2+2
Aplicando el teorema de la altura, la altura es la media proporcional entre 2 y π/2, es decir, la raíz de π .
Y por tanto el cuadrado así construido tiene por área π , es decir la misma que el círculo inicial.

¡¡¡El círculo convertido en cuadrado!!!

Verlo para creerlo. Todo en esta vida es posible, incluso hace 2400 años, eso sí, si nos olvidamos de la maldición de la regla y el compás.

La concoide de Nicomedes

La investigación de curvas mecánicas no se detuvo con Euclides. Quizás uno de los casos más espectaculares sea el de la concoide de Nicomedes (280-210 a. de C.) por lo extraño de su construcción.



Su construcción implica las herramientas de construcción geométricas euclidianas, recta y círculo, pero incorpora además movimiento y equidistancia… una auténtica joya.

Para construirla se necesitan los siguientes elementos:

- Una recta (la directriz).
- Un punto exterior a la recta ***O*** (origen o polo).
- Un segmento con una longitud determinada ***k*** (constante).

El proceso es complicado

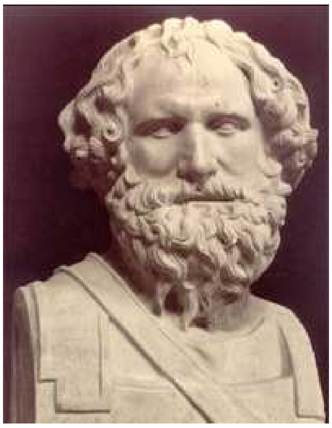
Desde ***O*** se traza una recta cualquiera que corta a la directriz en el punto ***P***.
Con centro en ***P*** y radio ***k*** se traza una circunferencia que corta a la recta en dos puntos cuya distancia a P es la longitud prefijada *k*.

Es por tanto una curva con dos ramas no simétricas. Y lo más increíble: también sirve para trisecar un ángulo. El único inconveniente es que cada ángulo a trisecar exige una concoide diferente.

Lo que parece claro, es que los heterodoxos, los artesanos de las curvas, los enemigos de las limitaciones de la regla y el compás... ¡LO HAN CONSEGUIDO!

Los tres problemas clásicos resueltos con la ayuda de curvas mecánicas: las cónicas de Menecmo y la curva de Hipías o la concoide de Nicomedes.

Pero Platón, Aristóteles y Euclides los expulsarán de la historia de la ciencia...



Arquímedes. La venganza del genio...

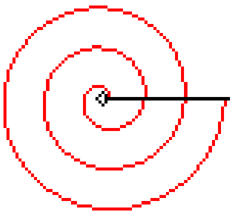
"La espiral es un círculo espiritualizado. En la forma espiral, el círculo, desenrollado, devanado, ha dejado de ser vicioso... La vuelta sigue a la vuelta, y toda síntesis es la tesis de la nueva serie..." ***Vladimir Nabokov***

Espirales... en todos los sitios, salvo en las clases de matemáticas.

Pocos hechos son tan incuestionables como la presencia de las espirales, no solo en la naturaleza, sino en la práctica totalidad de las culturas.

Ante las innumerables manifestaciones naturales de las espirales, tanto de carácter orgánico como mecánico, estas curvas no podían dejar de llamar la atención de los matemáticos y ser objeto de su investigación. Sin embargo, como su propia forma sugiere son curvas esquivas. No son curvas geométricas estáticas como la circunferencia o las lúnulas. Para construirlas se necesitan recursos mecánicos, algo que crece o que se mueve.

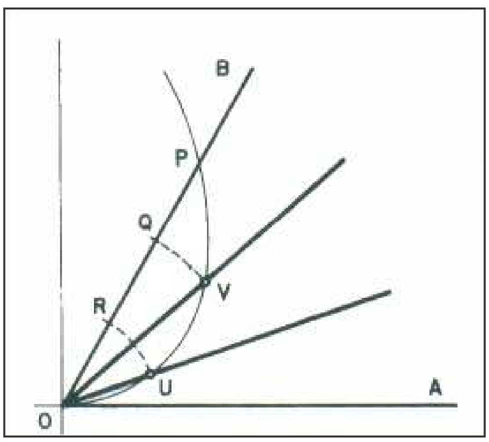
De Arquímedes se conocen dos libros sobre la geometría plana, uno dedicado a la circunferencia, *De la medida del círculo*, donde nos proporciona el salto a la fama del número π y una de sus aproximaciones más usadas hasta nuestros días; y otro dedicado a la espiral uniforme, *De las espirales*. Un libro complicado y de lectura difícil, donde Arquímedes hace un estudio exhaustivo de la espiral uniforme.



En esta obra Arquímedes define, quizás por primera vez en la historia, una curva mecánica, una curva basada en el movimiento.

" Imaginaos una línea que gira con velocidad constante alrededor de un extremo, manteniéndose siempre en un mismo plano, y un punto que se mueve a lo largo de la línea con velocidad lineal constante: ese punto describirá una espiral"

El interés del sabio de Siracusa por esta curva estaba motivado por un problema muy alejado del mundo de las curvas: la trisección del ángulo. Arquímedes, gracias a la espiral uniforme, descubrió un método para dividir un ángulo en tres partes iguales, y en general en n partes iguales.



Basta hacer coincidir el vértice del ángulo con el origen de la espiral, dividir el segmento que va desde el origen al punto de corte de la espiral con el segundo lado del ángulo en tres partes iguales y trazar por esos puntos arcos de circunferencia hasta que corten a la espiral.

Si unimos el origen con esos puntos de corte tendremos los tres ángulos que dividen al original en tres partes iguales.

Sobre las espirales es una obra cargada de sorpresas, que colocan a Arquímedes en la cima de la historia de las matemáticas. En ella demuestra propiedades de las áreas de las diferentes espiras, tan sorprendentes, pensando que faltan casi dos mil años para que se invente el Cálculo diferencial, como estas:

"El área barrida por el radio de la espiral en su primera revolución es la tercera parte del área del círculo cuyo radio es el radio final de esta revolución..."

"El área barrida por el radio en la segunda vuelta es 6 veces el área de la primera vuelta".

"El área barrida en la segunda revolución está en razón 7/12 con el círculo cuyo radio es la posición final del radio vector"

¿Cómo podía Arquímedes realizar estos cálculos?

La historia ha sido con él profundamente injusta. Su genial *Método sobre los teoremas mecánicos* se perderá en la noche de los tiempos, citándose como una leyenda, como "la variable oculta" y sólo se podrá recuperar y descifrar en 1906 gracias al famoso palimpsesto y al trabajo de Heiberg. La pérdida de nuevo del palimpsesto y su recuperación a finales del siglo XX convierten la historia del método en una auténtica novela matemática. La historia de las matemáticas hubiese cambiado radicalmente de no haberse perdido.

Su potente y heterodoxo método mecánico le permitió a Arquímedes calcular innumerables cuadraturas y cubaturas, entre otras la cuadratura de la parábola, el volumen de la esfera, del elipsoide, del paraboloide, del hiperboloide, de la uña cilíndrica, de la bóveda cilíndrica...

En su carta a Dositeo, en la que le comunica su éxito al cuadrar el arco de parábola, orgullosos de su trabajo, le dice:

> *"Y sabemos que ninguno de los anteriores ha intentado cuadrar el segmento comprendido por una recta y una sección del cono rectangular, lo que ahora ya ha sido descubierto por nosotros, pues aquí se demuestra que todo segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectangular es 4/3 del triángulo que tiene la misma base y la misma altura que la sección"*

Arquímedes se adelanta más de 18 siglos a los precursores y a los fundadores del cálculo diferencial e integral, en tres de sus ideas geniales:

- Los indivisibles => infinitesimales
- Aplicación de la mecánica: leyes de la palanca
- La composición "virtual" de las secciones de las figuras y los sólidos

Estamos completamente de acuerdo con Ruffini cuando afirma:

> «*Arquímedes anticipa nuestro Cálculo Integral, tanto en el tiempo como en los procedimientos y en la genialidad de los artificios no superados por los precursores del siglo XVII.*»

Decididamente, Arquímedes era un genio, uno de los tres grandes de las Matemáticas de todos los tiempos; y sin embargo nuestros jóvenes sólo le recordarán al acabar sus años escolares como el sabio de la bañera, el de ¡Eureka!, o, a lo sumo, como el descubridor de las leyes de la palanca... Injusticias de los planes de estudio de matemáticas.

Por suerte la Historia, con mayúsculas, de las Matemáticas está plagada de heterodoxos como Arquímedes: Cavalieri, Galileo, Newton, Euler, Gauss, Galois, Riemann, Cantor, Perelmann...

Son sólo la punta del enorme iceberg de la heterodoxia.

Y a pesar de todo, ironías de la vida...

La casi totalidad de los matemáticos y de los profesores le han dado, a lo largo de más de dos mil años, mucha más importancia a un simple libro de didáctica de las matemáticas, a un libro de texto – *Los Elementos de Euclides* – que a los libros que constituyen el legado de Arquímedes: *Medida del círculo, Sobre la esfera y el cilindro, Sobre las espirales, El método...* auténticas obras de investigación matemática en todos los sentidos.

Para casi todos, EUCLIDES – un simple recopilador- sigue siendo más importante que ARQUÍMEDES – uno de los 3 grandes de la historia de las matemáticas-.

A pesar de que la dinámica y la "mecánica" es hoy mucho más asequible para nosotros, a pesar de instrumentos de construcción y movimiento como CABRI, Geogebra, Descartes... a pesar de las TICs..., seguimos viviendo en nuestras aulas en el reino de la regla y el compás... en el universo de la tiza y la pizarra.

Porque no nos engañemos, a pesar del esfuerzo de los presentes, que somos vanguardia en muchos sentidos, pero no mayoría, en nuestras aulas de primaria y secundaria:

- El mundo casi siempre es un PLANO, cartesiano… además.
- Los jóvenes viven toda su existencia académica en Planilandia, y no precisamente en la de Abbott.
- Un mundo donde las líneas siempre son rectas, las curvas círculos o cónicas, las figuras planas polígonos (regulares a ser posible) y los cuerpos sólidos, cuando los ven, cubos, prismas, cilindros, pirámides o conos… los más improbables.

Pero aún estamos a tiempo de cambiar.
Para comenzar con optimismo en septiembre, el próximo curso...

10 CONSEJOS PARA LOS PROFESORES Y PROFESORAS DE MATEMÁTICAS PARA DISFRUTAR EN LAS CLASES DE MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XXI

1. Las matemáticas son una ciencia viva

No dejar que la ortodoxia histórica, curricular, las pruebas de nivel autonómicas y las PAUs la maten y la conviertan en una ciencia de museo.

2. La historia de las matemáticas es una excelente profesora

No la despreciéis. El que ignora su propia historia está obligado a repetirla y además es un necio.

"Me pregunto si el tiempo malgastado en muchos de nuestros rollos magistrales en los que tanto abundamos los profesores de matemáticas de todos los niveles no podría invertirse con gran provecho en contar pausadamente alguna de estas historias apasionantes del pensamiento humano."

Miguel de Guzmán

3. No a los integrismos

Huid del integrismo matemático (como del religioso). Dejad un lugar para la heterodoxia en vuestras clases (y en vuestras vidas).
La matemática no se agota con Euclides y Descartes, por suerte también existieron Arquímedes y Euler; invítalos de vez en cuando a tus clases.

4. Recuperar la Aritmética

No confundáis la Aritmética con la Logística
La reina de las matemáticas era la Aritmética de Gauss, de Fermat, de Euler, de Euclides... no la de los castillos de fracciones y las operaciones sin sentido con radicales
Enseñad a pensar, dejad las cuentas a los contables y las raíces a los botánicos.

5. Viva la geometría... dinámica

La geometría es mucho más que calcular áreas y perímetros.
¡ Pero se mueve!, anima un poco la geometría estática.

"La geometría interesante siempre ha sido una geometría del movimiento. No prives tus alumnos de la experiencia de descubrir en geometría". Miguel de Guzmán

6. No todo es Álgebra y Análisis

Menos fórmulas y recetas, más conceptos y sobre todo... más aplicaciones. Lo importante no son las ecuaciones, las derivadas y las integrales. Lo importante es saber para qué sirven
Lo importante es la manzana (C. Alsina)
Calculadoras gráficas en las PAUs ¡YA!

7. La estadística es matemáticas

No la dejes siempre para el final.
Un alto porcentaje de la información cuantitativa en nuestra sociedad utiliza la estadística como soporte.
Hay que liberar a la estadística de las garras de tertulianos y demagogos.

8. Utilizar los recursos tecnológicos

Visualizar las Matemáticas
"... Esta revolución informática y los nuevos contenidos de la Matemática actual no pueden ser desconocidos por la enseñanza. ...
Las Matemáticas no deben enseñarse ya de una manera expositiva, estática, transmitida por el profesor a un conjunto de alumnos pasivos. Es preciso que estos participen, observen, exploren, hagan conjeturas y se enfrenten con problemas que les interesan.

Gonzalo Sánchez Vázquez

9. Reivindicar el tiempo

Pensar exige tiempo.
Rebelaos contra los programas aberrantes a impartir cada vez con menos horas.
Pedid a los políticos un poco de calma... ¡para vosotros y para vuestros alumnos!

y... 10

¡No dejéis que las ecuaciones os impidan ver las flores!
¡Que las rectas no aplasten las curvas!

Poema de Jesús Lizano: Las personas curvas

Y como toda historia bien narrada ha de tener su moraleja, que es un diminutivo de la palabra "moral" – laica, por supuesto, que los matemáticos también tenemos nuestras normas morales - , y como además, aunque no lo parezca estamos en el siglo XXI, no puedo terminar sin una reflexión en forma de eslogan publicitario, de lema de campaña, de canto a la rebeldía y a la razón:

En todas las aulas de Matemáticas...

MENOS EUCLIDES
y
MÁS ARQUÍMEDES

Antonio Pérez Sanz

Videos

Serie Universo Matemático RTVE. Autor: Antonio Pérez Sanz
- Pitágoras. Mucho más que un teorema
- Historias de pi
- Orden y caos. La búsqueda de un sueño

Serie Más por menos. RTVE. Autor: Antonio Pérez Sanz
- El mundo de las espirales
- Cónicas: del baloncesto a los cometas
- Fractales. La geometría del caos

La duplicación del cubo. UNED. Autor E. Bujalance. A. Costa

Bibliografía

Álvarez Pérez J.M. Curvas en la historia. Ed. Nivola.2006
Platón. Diálogos. VI. Timeo. ED. Gredos. 1992
Arquímedes. Tratados. Eutocio. Comentarios. Ed. Gredos. 2005
González Urbaneja P.M. Arquímedes. El método. Ed. UAB. 1995
González Urbaneja P.M. Platón. Ed. Nivola. 2006
Río Sánchez, J. del. **Lugares geométricos. Cónicas**. Ed. Síntesis. Madrid 1991
Torija. R. **Arquímedes. Alrededor del círculo**. Ed. Nivola. Madrid 1999
Antonio Pérez. Espirales
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Exposiciones/Expode/AntonioPerez/Espiral.asp
González Enriquez. Trisectrices http://descartes.cnice.mecd.es/Geometria/trisectrices_pge/index.html
Curvas http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2dsp.shtml
Divulgamat. P. M. Glez. Urbaneja. Así lo hicieron
http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/AsiLoHicieron/arquimedes/arquimedes1.asp
http://www.divulgamat.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/PlatonBiblio.asp
De las trisectrices. La cicloide y otras curvas. http://www.divulgamat.net/weborriak/TestuakOnLine/03-04/PG03-04-lcandres.pdf

Anexo

Poema de Jesús Lizano

LAS PERSONAS CURVAS
Mi madre decía: a mi me gustan las personas rectas

A mí me gustan las personas curvas,
las ideas curvas,
los caminos curvos,
porque el mundo es curvo;
y me gustan las curvas
y los pechos curvos
y los culos curvos,
los sentimientos curvos
la ebriedad: es curva;
las palabras curvas:
el amor es curvo;
¡el vientre es curvo!;
lo diverso es curvo.
A mí me gustan los mundos curvos;
el mar es curvo,
la risa es curva,
el dolor es curvo;
las uvas: curvas;
los labios: curvos;
y los sueños, curvos;
los paraísos, curvos
(no hay otros paraísos);
a mí me gusta la anarquía curva;
el día es curvo
y la noche es curva;
¡la aventura es curva!
Y no me gustan las personas rectas,
el mundo recto,
las ideas rectas;
a mí me gustan las manos curvas,
los poemas curvos,
las horas curvas:
¡contemplar es curvo!;
(en las que puedes contemplar las curvas
y conocer la tierra);
los instrumentos curvos,
no los cuchillos, no las leyes:
no me gustan las leyes porque son rectas,
no me gustan las cosas rectas;
los suspiros: curvos;
los besos: curvos;
las caricias: curvas.
Y la paciencia es curva.
El pan es curvo
y la metralla recta.
No me gustan las cosas rectas
ni la línea recta:
se pierden
todas las líneas rectas;
no me gusta la muerte porque es recta,
es la cosa más recta, lo escondido
dentro de las cosas rectas;
ni los maestros rectos
ni las maestras rectas:
¡libérennos los dioses curvos de los dioses rectos!
El baño es curvo,
la verdad es curva,
yo no resisto las verdades rectas;
vivir es curvo,
la poesía es curva,
el corazón es curvo.
A mí me gustan las personas curvas
y huyo, es la peste, de las personas rectas.

Jesús Lizano