

HOMENAJE A MIGUEL DE GUZMÁN



MESA REDONDA

¿QUÉ MATEMÁTICAS PARA TODOS EN EL SIGLO XXI?

*Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí Madrid
<http://platea.cnice.mecd.es/~aperez4>*

El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?

*Miguel de Guzmán.
El último pitagórico*

Quisiera comenzar mi exposición con estas palabras de Miguel de Guzmán, recogidas en la nota necrológica que colgué en mi página web (<http://platea.cnice.mecd.es/~aperez4>) a los pocos días de su fallecimiento, en la que me refería a él como “El último pitagórico”. Estas palabras se refieren a tres de las inquietudes principales de Miguel: la belleza, el juego y la enseñanza de las matemáticas.

Entrando en el tema de la mesa redonda, o mejor, en alguno de sus múltiples aspectos, conviene situar el problema desde un punto de vista sociológico.

Estamos inmersos en una nueva realidad social, caracterizada por una multiplicidad de canales de información, de comunicación y de formación. TV, vídeo, ordenador, video-consolas, DVD, Internet, chats, móvil, SMS... han conseguido que los cauces desde los que la información llega a nuestros jóvenes sea muchísimo más variada que hace tan sólo unas pocas décadas. La institución escolar, considerada en su conjunto, ha perdido un monopolio que venía ejerciendo desde hace siglos: el monopolio de la transmisión de saberes.

Por otra parte, y de forma simultánea, la familia ha perdido el monopolio de la transmisión de valores. La influencia de los medios de comunicación de masas en la formación de hábitos, conductas y opinión en la sociedad y de manera notable entre los jóvenes es más que notable.

Si algo caracteriza este principio de siglo son los cambios, y sobre todo los cambios relacionados con la información y su transmisión:

- Han cambiado los propios contenidos de la información: lo local pierde peso ante lo global, el volumen de contenidos parece aumentar pero se trivializa, las modas son cada vez más efímeras, la información más volátil...
- Han cambiado las formas y los medios de transmisión: la información de hoy en día es icónica, fragmentada, rápida, sin tiempo para la reflexión, visual con una carga afectiva atractiva...
- Han cambiado, por último, los propios valores y hasta los conceptos: incluso el concepto de inteligencia ha sufrido grandes variaciones. Una persona catalogada socialmente como “*inteligente*” a principios del siglo XX no coincidiría del todo, y a veces muy poco, con alguien “*inteligente*” a principios del siglo XXI.

Y en ese marco global de cambios sociales, culturales, intelectuales, mediáticos y tecnológicos es donde hay que formularse la pregunta de esta mesa redonda: y ahora ¿qué matemáticas hay que enseñar?

En el invierno de 1999, los días 5 y 6 de febrero tuvo lugar una **Reunión sobre la Enseñanza de las Matemáticas** convocada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y presidida por Miguel de Guzmán. "**Problemas actuales de nuestra educación matemática primaria y secundaria**". A esta reunión asistimos representantes de las distintas Sociedades de Matemáticas y la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

En esta reunión se elaboró un documento que fue enviado al MECD y que pretendía ser una contribución al diagnóstico de los problemas de la enseñanza de las matemáticas y que apuntaba alguna de las posibles soluciones. Quiero destacar tres puntos de dicho documento, aunque sólo sea para constatar que las autoridades educativas no nos han hecho desde entonces mucho caso:

- Identificar las **necesidades matemáticas básicas de la población adulta**, para que el currículo de las matemáticas en la enseñanza obligatoria satisfaga adecuadamente las mismas.
- El problema **no es**, simplemente, **elaborar una lista de destrezas y conocimientos** más o menos usuales y útiles en la vida de un adulto, para incorporarlos al currículo.
- Muchos de los objetivos que se plantean y se alcanzan (en mayor o menor medida) en el ámbito escolar, **no traspasan ese ámbito** y no llegan nunca a incardinarse en el acervo de conocimientos prácticos que maneja un adulto en la vida cotidiana.

La solución, no era entonces, y no es ahora elaborar un amplio listado de contenidos, en forma de programa extenso y ambicioso de los conocimientos que deberían tener nuestros jóvenes al acabar la secundaria. Por incrementar la lista de contenidos en los programas no hacemos a nuestros alumnos más expertos en matemáticas. Como se apuntaba en el mismo documento, el problema no era tanto de contenidos como de fomentar actitudes positivas hacia las matemáticas:

- La alfabetización matemática de la sociedad ha de considerar que la gran mayoría de personas sólo requerirá, en la vida diaria, una **capacidad interpretativa de los aspectos matemáticos que se le presenten**, frente a una pequeña proporción de personas que utilizará de manera creativa o productiva, las matemáticas.
- Tal vez sea más importante **saber entender** que **saber hacer**.
- En el mismo sentido, apuntamos que es más interesante que el común de los ciudadanos tenga una **actitud positiva hacia las matemáticas** que el hecho de que conozca al final de sus estudios muchas cuestiones puntuales o tenga más o menos sistematizadas una serie de rutinas.

Decididamente, los contenidos matemáticos los futuros libros de texto y los "niveles" de capacitación matemática de los ciudadanos del siglo XXI van a venir marcados por la necesidad urgente y perentoria de abrir las ventanas de las aulas a la sociedad real. En este sentido los programas y los contenidos deberían venir dados por estos tres elementos:

- El periódico
- La calculadora: la de hoy y las de mañana
- Las herramientas tecnológicas "sociales"

En el sentido de que todo ciudadano ha de salir de la educación obligatoria con los conocimientos matemáticos suficientes para entender y poder interpretar de forma crítica la creciente información cuantitativa, gráfica, estadística... que con distintos instrumentos matemáticos proporcionan los periódicos y los distintos medios de comunicación.

Pero los ciudadanos han de dominar y utilizar de forma racional y sensata los distintos instrumentos de cálculo que las tecnologías han puesto en sus manos: los currículos vendrán condicionados por la evolución de las calculadoras, las de hoy y las de mañana, a pesar de las actuales resistencias de algunos sectores a su uso en la enseñanza.

Así mismo habrá que incorporar aquellos contenidos que permitan a todos los ciudadanos utilizar las herramientas tecnológicas “sociales” que se incorporen a las actividades profesionales, laborales y domésticas: hojas de cálculo, programas de estadística....

Las herramientas

Pero si importante es determinar el qué enseñar, quizás sea mucho más interesante, discutir sobre el cómo, es decir, pensar en las herramientas. En este camino, como en tantos otros, Miguel de Guzmán en sus libros, artículos, páginas de Internet, conferencias y cursos nos ha marcado de manera clara el rumbo para un futuro inmediato. Un rumbo en el que quiero destacar cinco etapas ineludibles:

- **Visualizar las Matemáticas**
 - El rincón de la pizarra
- **Las nuevas tecnologías**
 - La experiencia de descubrir en Geometría
- **Aprender de, aprender con la historia de las Matemáticas**
- **A través del juego y la belleza**
- **Aventuras matemáticas para pensar mejor**

Visualizar las Matemáticas

En su libro *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Pirámide 1997, Miguel nos hace unas reflexiones de lo más interesante.

Recuerdo haber discutido con él en alguno de los cursos que hemos compartido, que quizás había que reivindicar un rincón de la pizarra para visualizar conceptos y destrezas de análisis, pero que en la enseñanza obligatoria había que pedir no sólo la pizarra entera sino también las pizarras electrónicas, la imagen en movimiento...

Esta reivindicación de la necesidad de “**ver**” las matemáticas no es en absoluto una moda moderna, matemáticos tan poco sospechosos como éstos nos lo demuestran:

- La palabra griega "θεωρημα" significa "*lo que se contempla*"
- "La matemática es una ciencia del ojo" *Gauss*
- "Es útil en muchas ocasiones describir estas figuras y mostrarlas a los sentidos externos para que de este modo se mantenga atento nuestro pensamiento más fácilmente". *Descartes*

Ahora, también Miguel se nos suma a la lista de matemáticos notables que en la historia han apostado por la visualización. Sus comentarios al respecto son claros y contundentes:

*"Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de **contenidos visuales, representables intuitivamente**, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas de campo"*

*"Los expertos poseen **imágenes visuales**, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo"*

*"Las ideas básicas del análisis elemental, orden, distancia, operaciones con números, nacen de **situaciones bien concretas y visuales**"*

En ocasiones, con su especial sentido del humor, riéndose de situaciones seguramente vividas por él mismo:

Tras esforzarnos por hacer ver a nuestros alumnos mediante **construcciones visuales** que deberían hacer absolutamente obvia una cierta situación matemática, algunos nos piden: “Ahora, por favor, una verdadera demostración matemática”

¿Qué es una demostración? Para los pitagóricos, que jugaban con piedras, probablemente sería: “¡contempla!”

¡Miguel de Guzmán era un pitagórico en todos los sentidos!

Las nuevas tecnologías

Me resulta del todo verosímil que en un futuro bastante próximo la experimentación será mucho más fácil de realizar que ahora, la conjetura y su comprobación o refutación se hará así mucho más sencilla y sin esfuerzo, y la demostración automática será directa”

Las Nuevas Tecnologías Informáticas van a cambiar de forma radical no sólo los contenidos de los currículos adaptándolos a las demandas sociales, van a cambiar, cuanto antes mejor, y quizás de forma más radical la manera de enseñar y de aprender matemáticas y no sólo en la universidad.

El trabajo con ordenadores en las aulas de matemáticas va a permitir realmente un aprendizaje activo y va a poder mostrar unas matemáticas vivas, no unas matemáticas cerradas, acabadas, muertas... unas matemáticas de museo.

El acceso al ordenador por parte de todos los alumnos nos va a posibilitar, y al mismo tiempo nos va a exigir:

1. Diseñar con imaginación experimentos bien contruidos y orientativos del tema a explorar
2. Conjeturar las razones profundas que yacen bajo los experimentos y los resultados, números, imágenes, estructuras..., que observamos en esta exploración
3. Reforzar o refutar nuestras conjeturas con experimentos más refinados
4. Demostrar o refutar automáticamente con el ordenador

Es decir, **construir matemáticas** como la mejor forma de aprenderlas.

Aprender con la Historia, aprender de la Historia de las Matemáticas

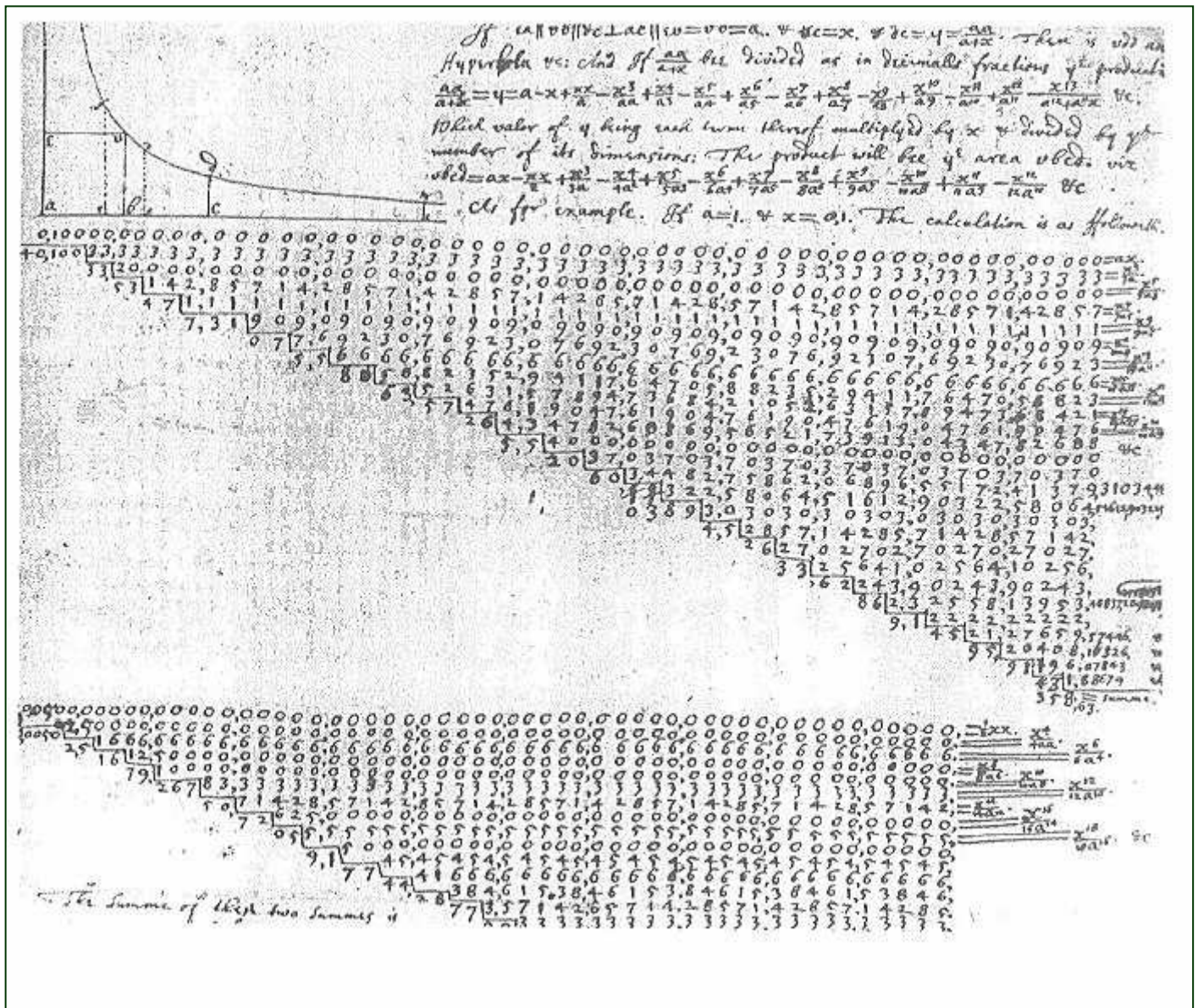
Existen constelaciones de hechos matemáticos que se prestan para hacer de ellos una novela bien interesante.

Me pregunto si el tiempo malgastado en muchos de nuestros rollos magistrales en los que tanto abundamos los profesores de matemáticas de todos los niveles no podría invertirse con gran provecho en contar pausadamente alguna de estas historias apasionantes del pensamiento humano

Estas palabras de Miguel son más elocuentes que cualquier argumento que yo podría esgrimir hoy aquí. Está claro que la historia de las matemáticas nos brinda hoy en día recursos de fácil acceso, localización y reproducción para introducir en el aula los grandes momentos de los descubrimientos matemáticos de los conceptos y destrezas que estamos enseñando.

Porque el binomio de Newton no es lo que contamos a nuestros alumnos de secundaria. El binomio de Newton es este documento, un manuscrito del propio Isaac Newton, donde da una muestra de paciencia y

eficacia para obtener con su genial recién descubierta tecnología matemática el desarrollo de $\frac{a^2}{a+x}$



Y su explicación en clase puede constituir uno de los momentos felices de generar actitudes positivas hacia las matemáticas y de contextualizar los conocimientos en su época histórica.

Enseñar a través del juego y la belleza

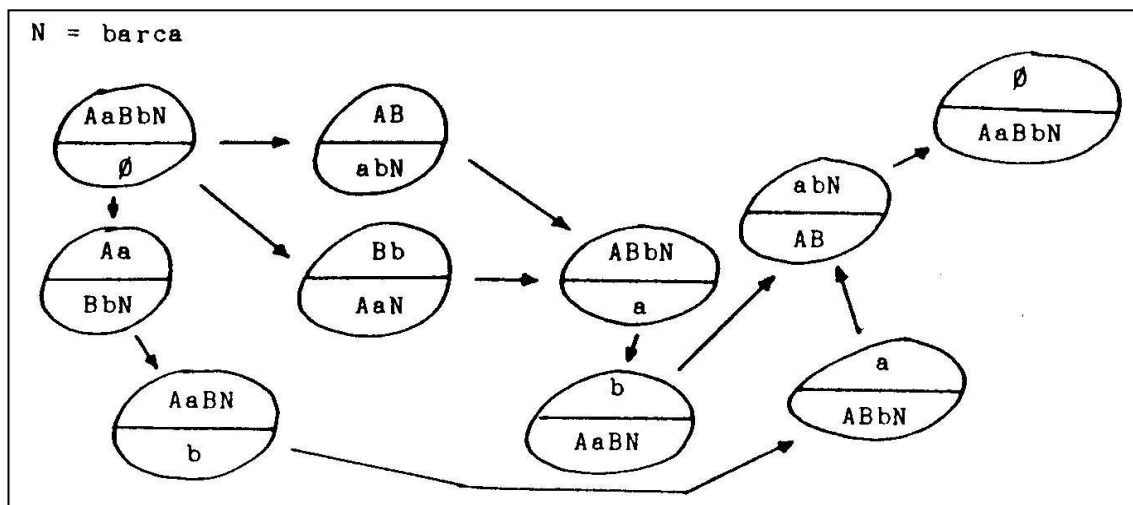
Propositiones ad acuendos iuvenes. Alcuino de York (735-804)

Tres hombres y sus respectivas hermanas quieren pasar un río. En el río hay una barca que caben sólo dos personas. Ninguno de los hombres quiere dejar a su hermana con los otros hombres. ¿Cómo cruzarán los seis a la otra orilla?

Este problema tiene más de 1200 años y está recogido en uno de los primeros libros de matemáticas recreativas de la historia. Escrito por Alcuino de York. El título **Problemas para estimular a los jóvenes** ya nos revela su intención educativa.

Lo he traído aquí a colación porque es uno de los estudiados por Miguel de Guzmán en uno de sus artículos sobre la utilización de los juegos en la enseñanza de las matemáticas <http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat/juemat.htm>. En el desarrollo del mismo nos muestra técnicas heurísticas útiles en otras situaciones muy distintas:

Empezar por lo fácil hace fácil lo difícil... y una muestra más de poder de la visualización
 El modelo del gráfico para dos parejas es ampliable fácilmente a tres...



Y como nos dice Miguel, de esta forma no sólo podemos encontrar una solución, sino que podemos obtenerlas todas y escoger la mejor, si es que hay alguna mejor.

Aventuras matemáticas... para pensar mejor

Los cuentos y juegos matemáticos que vamos a ir recorriendo juntos se pueden concebir como historias policíacas en las que tú mismo vas a ser el detective. Tú vas a ser el primero que las vivas... a tu modo, aunque otros muchos las hayan vivido antes al suyo. ¡Prepárate para la aventura!...

Así comienza el capítulo 0 de sus *Aventuras Matemáticas. Una ventana hacia el caos y otros episodios.* Pirámide 1995.

Y así se plantea el auténtico aprendizaje matemático, el transcurrir por un camino que a pesar de haber sido recorrido previamente por otros tiene la virtud de poder aparecer virgen a nuestros ojos y a nuestra mente. Y proporcionarnos el placer del descubrimiento, el gusto de construir y de hacer matemáticas.

Las clases de matemáticas en la enseñanza obligatoria deberían plantearse siempre así, como aventuras del conocimiento, con su carga afectiva de entusiasmo, de paciencia, de tenacidad y esfuerzo, de compartir, de ayudar al compañero o de recibir su apoyo, de consenso y solidaridad para llegar a la meta.

Porque aprender matemáticas ha de servirnos para resolver mejor los otros problemas, los de la vida cotidiana, los nuestros y los de la sociedad en la que vivimos...

Como decía nuestro amigo Miguel:

No pienses que las estrategias de pensamiento que aquí tienes sólo son buenas para resolver problemas matemáticos.

En líneas generales, cambiando lo que hay que cambiar, esas mismas estrategias las puedes utilizar en un montón de problemas de la vida cotidiana...

Esto es algo muy importante que la matemática puede enseñar a todo el mundo: un método de pensamiento sobrio, razonable, fiable...

El último pitagórico

El año pasado Miguel participó en la Comisión sobre la enseñanza de las ciencias, organizada por el Senado, allí leyó su ponencia que llevaba por título *Valores y aspectos éticos en la actividad científica*.

Es una ponencia que merece la pena leer, porque aunque parece que hable del pasado, y de un pasado muy remoto, nos proporciona pautas para el futuro.

En ella Miguel vuelve a mostrarnos una de esas pinceladas pitagóricas, que han impregnado su actividad como matemático, como profesor y como persona; decía:

El quehacer matemático fue entre los pitagóricos en cierto modo una guía de contemplación y de comportamiento.

Una buena lección de humanismo ecológico que lastimosamente hemos desaprovechado convirtiendo, en gran parte, la educación matemática en una rutina un tanto vacía en las aulas de formación de nuestros jóvenes, precisamente donde sería más necesario hacer uso de la capacidad formativa e integradora del quehacer matemático.

Con la muerte de Miguel desaparece el último pitagórico, pero siempre quedará entre nosotros su forma de pensar, de actuar y de vivir:

La matemática es consenso, es sometimiento a la realidad, pero es también, y de forma muy importante, libertad

Antonio Pérez Sanz
Madrid 15 de diciembre de 2004